TRADUIT DU RUSSE

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

V. KARMANOV

ÉDITIONS DE MOSCOU

V. KARMANOV

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par VALENTIN POLONSKI

Avis au lecteur

Une erreur regrettable s'est glissée dans la traduction (p. 125—130). Dans le paragraphe 8.6. il s'agit de la méthode des tangentes là où il est écrit «méthode de Newton».

На французском языке

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1975

© Traduction française · Editions Mir · 1977

TABLE DES MATIÈRES

Préface 5

Chapitre 1. INTRODUCTION 7

1.1. Objet de la programmation mathématique 7
1.2. Sur les modèles 9
1.3. Classification et traits spécifiques 10
1.4. Exemples des modèles mathématiques 11
1.5. Notations principales 15

Chapitre 2. ÉLÉMENTS DE L'ANALYSE CONVEXE 18

2.1. Espace euclidien. Ensembles convexes. 18
2.2. Projection d'un point sur un ensemble. Propriétés 19
2.3. Théorèmes de séparation 21
2.4. Points anguleux. Théorème de représentation 23
2.5. Théorème de Farkas. Cône 25
2.6. Théorème de fermeture d'un cône 27
2.7. Fonctions convexes et concaves 29
2.8. Dérivabilité suivant une direction. Continuité 31
2.9. Fonctions convexes dérivables 34
2.10. Deux exemples de fonctions convexes 35
2.11. Ensembles avec contraintes concaves 36
2.12. Quelques propriétés extrémales des fonctions sur des ensembles convexes ... 37
2.13. Fonctions fortement convexes 40

Chapitre 3. GÉNÉRALITÉS SUR LA PROGRAMMATION CONVEXE 44

3.1. Problème général de programmation convexe 44
3.2. Notation 46
3.3. Condition de régularité 46
3.4. Lagrangien. Conditions d'optimalité 46
3.5. Théorème de Kuhn-Tucker 48
3.6. Cas de dérivabilité 51
3.7. Problème avec contraintes linéaires 54

Chapitre 4. PROGRAMMATION LINÉAIRE 56

4.1. Problème général 56
4.2. Dualité 56
4.3. Terminologie 57
4.4. Interprétation géométrique 57

4.5. Théorèmes fondamentaux 58
4.6. Caractéristique algébrique d'un point anguleux 64
4.7. Formes mixtes des problèmes duals 67
4.8. Réduction des problèmes avec contraintes mixtes aux problèmes équivalents de forme générale 68
4.9. Forme canonique des problèmes de programmation linéaire 69

Chapitre 5. MÉTHODES FINIES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE 72

5.1. Méthode du simplexe 72
5.2. Relations récurrentes de l'algorithme de la méthode du simplexe (relation entre les paramètres des itérations successives) 76
5.3. Méthodes de recherche du point anguleux initial 77
5.4. Dégénérescence. Méthode des perturbations. 80
5.5. Remarque sur l'application de la méthode du simplexe pour résoudre des problèmes de programmation linéaire de classes spéciales 82
5.6. Forme révisée de la méthode du simplexe 83
5.7. Forme produit de la matrice inverse 84
5.8. Méthode duale du simplexe 84
5.9. Estimation par résolution du problème dual 87
5.10. Application de la méthode duale du simplexe aux problèmes avec contraintes supplémentaires 89
5.11. Méthode primale-duale 90

Chapitre 6. MÉTHODE DES PÉNALITÉS 95

6.1. Description de la méthode 95
6.2. Théorèmes de la convergence 98
6.3. Application de la méthode des pénalités à la programmation linéaire 102

Chapitre 7. STABILITÉ DANS LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE .. 105

7.1. Problèmes correctement et incorrectement posés 105
7.2. Une classe des problèmes correctement posés 108
7.3. Problèmes avec contraintes exactes. Méthode de régularisation 109
7.4. Convergence 109
7.5. Méthode de régularisation (cas général) 112
7.6. Convergence de la méthode de régularisation (cas général) 112
7.7. Choix des paramètres de régularisation 116

Chapitre 8. MÉTHODES DE MINIMISATION UNIDIMENSIONNELLE 117

8.1. Problèmes de minimisation unidimensionnelle. Essais successifs 117
8.2. Méthodes à calcul unique de la valeur d'une fonction à chaque itération 118
8.3. Méthode de Fibonacci 120
8.4. Algorithmes de la méthode de Fibonacci 122
8.5. Méthode de la section dorée 124
8.6. Méthode de Newton 125

Chapitre 9. RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'EXTRÉMUM À L'AIDE DES MÉTHODES DE RELAXATION. MÉTHODES DE MINIMISATION SANS CONTRAINTE 131

9.1. Questions de convergence 131
9.2. Notion de relaxation. Lemmes 132
9.3. Théorèmes des estimations 134
9.4. Méthodes de descente. Schéma général 137
9.5. Méthode du gradient 143
9.6. Méthode des directions conjuguées 145

9.7. Méthode séquentielle 152
9.8. Méthode séquentielle cyclique 154
9.9. Méthode séquentielle aléatoire 156
9.10. Méthode de la descente aléatoire 159
9.11. Convergence des méthodes de relaxation des problèmes non convexes 164

Chapitre 10. MÉTHODES DE RELAXATION DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE. PROBLÈMES D'EXTRÉMUM AVEC CONTRAINTES ... 168

10.1. Méthode de linéarisation (de type Frank et Wolfe) 168
10.2. Méthode du gradient projeté 175
10.3. Méthode des directions admissibles 184
10.4. Méthode de la recherche aléatoire 199
10.5. Méthode de la direction aléatoire projetée 205
10.6. Modes de recherche d'un point admissible 206
10.7. Convergence des méthodes de relaxation dans les problèmes à fonction économique non convexe 212

Bibliographie 216

Index 217

PRÉFACE

Le livre que nous présentons au lecteur est un exposé des principes fondamentaux de la programmation mathématique et des méthodes numériques de résolution des problèmes d'extrémum correspondants. Il est rédigé sur la base du cours professé par l'auteur pendant plusieurs années à la Faculté de Mathématiques et de Mécanique et à la Faculté de Calcul numérique et de Cybernétique de l'Université de Moscou.

Un cours dont l'objectif est d'initier à une discipline ne peut évidemment traiter que des méthodes principales. Il ne s'agit donc pas de donner ici un ouvrage de référence susceptible de fournir au lecteur l'algorithme qui pourra lui servir pour résoudre exactement le problème d'optimisation qu'il a à affronter.

Dans sa présentation des méthodes de résolution des problèmes d'extrémum non linéaires l'auteur s'est attaché surtout à clarifier les questions relatives à la convergence. La classe des problèmes envisagés s'est trouvée donc appauvrie étant limitée par le domaine convexe. Par contre, la rapidité de la convergence est une caractéristique objective de toute méthode numérique et si c'est possible on cherche à l'établir dans chaque cas particulier ; il s'ensuit donc que les procédés qui fournissent les estimations correspondantes peuvent servir dans les recherches que le lecteur entreprendra à son propre compte.

Une remarque encore s'impose en ce qui concerne les méthodes numériques. Dans ce domaine, la méthode à première vue la plus inefficace pour résoudre un problème réel peut s'avérer très heureuse ; l'auteur a donc repoussé l'idée de comparer des méthodes qui dépassent le cadre des estimations de la rapidité de la convergence.

La présentation de l'ouvrage permet au lecteur qui connaît les trois premiers chapitres de passer outre le quatrième et le cinquième pour lire l'un

quelconque des chapitres qui les suit : les chapitres 4 et 5 traitent de la programmation linéaire dont les fondements sont enseignés souvent avant le cours principal.

Des règles bien définies de la rédaction des ouvrages didactiques ont rendu impossibles les références aux auteurs des méthodes numériques et de certaines démonstrations originales. Quant à la bibliographie établie en fonction de l'exposé de chaque chapitre, nous ne l'avons pas prévue dans l'ouvrage.

L'auteur exprime toute sa gratitude pour les suggestions, les critiques et l'aide que lui ont apportées V. Béreznev, N. Bogomolov, F. Vassiliev, M. Kalinina et T. Roudnéva, participants du colloque de Programmation mathématique à la Faculté de Calcul numérique et de Cybernétique de l'Université de Moscou.

V. Karmanov

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Objet de la programmation mathématique

La programmation mathématique, une des branches de la recherche opérationnelle, consiste à établir la théorie et les méthodes de résolution des problèmes d'extrémum sur des ensembles définis par des contraintes linéaires et non linéaires (égalités et inégalités).

Les problèmes qu'elle traite sont appliqués dans les domaines les plus divers où s'impose une décision sur le mode d'action admissible (programme), par exemple, dans la gestion et le planning industriels, dans l'établissement des projets et la planification à long terme, dans le domaine militaire, etc.

Un nombre important de problèmes posés par la vie sociale est associé à des phénomènes commandables, c'est-à-dire à des phénomènes susceptibles d'être réglés sur la base des décisions prises en toute conscience. Aux étapes précoces de la vie en société le volume accessible d'information était limité, et les décisions, optimales dans un certain sens, étaient inspirées par l'intuition et l'expérience ; par la suite, le volume accru de l'information a permis d'appliquer des calculs directs. Il en a été ainsi, par exemple, des plannings établis pour des entreprises industrielles.

Tout autre est la situation d'une entreprise moderne qui fournit de nombreux articles en grandes séries et où, à l'entrée, l'information est si abondante, que pour prendre des décisions il est impossible de la traiter sans faire appel aux calculatrices électroniques les plus perfectionnées. Les difficultés sont encore bien plus grandes lorsque la décision doit être optimale.

Dans la recherche opérationnelle, on entend par décision un processus complexe dont voici les étapes principales.

1-ère é t a p e. Construire un modèle qualitatif du problème envisagé, c'est-à-dire relever les facteurs les plus importants et établir les lois qui les régissent.

Cette étape dépasse d'ordinaire le cadre des mathématiques.

2-ième é t a p e. Construire un modèle mathématique du problème envisagé, c'est-à-dire traduire le modèle qualitatif en langage mathématique. De la sorte, un modèle mathématique est une abstraction d'un phénomène réel décrite par des symboles mathématiques et construite de façon que son analyse rende possible l'intelligence de la nature intime du phénomène.

Un modèle mathématique établit des relations entre les paramètres de commande du phénomène.

Cette étape comprend également la construction d'une fonction économique des variables, c'est-à-dire d'une caractéristique numérique dont la valeur maximale (ou minimale) correspond à la meilleure situation du point de vue de celui qui doit prendre une décision.

Après ces deux étapes on obtient l'énoncé du problème mathématique considéré.

Pour effectuer la deuxième étape, il faut posséder des connaissances mathématiques.

3-ième étape. Etudier comment les variables influent sur la valeur de la fonction économique.

Cette étape suppose la possession d'un outil mathématique permettant de résoudre les problèmes posés par la deuxième étape de la prise d'une décision.

Une classe très large des problèmes de commande est celle des problèmes d'extrémum dans les modèles mathématiques desquels les contraintes sur les variables sont données par des égalités et des inégalités. La théorie et les méthodes de résolution de ces problèmes font précisément l'objet de la programmation mathématique.

A la troisième étape on applique le symbolisme et les techniques mathématiques pour résoudre des problèmes d'extrémum correspondants. Attirons l'attention sur le fait que les problèmes de programmation mathématique liés à la résolution des questions pratiques possèdent en général un grand nombre de variables et de contraintes. Le volume des calculs nécessaires pour obtenir les solutions correspondantes est si grand qu'il est impensable de réaliser le processus sans calculatrices électroniques modernes ; il impose donc soit la rédaction des programmes réalisant tel ou tel algorithme, soit l'utilisation des programmes standards déjà connus.

4-ième étape. Comparer les résultats fournis par la troisième étape à l'objet de simulation, c'est-à-dire vérifier les résultats par le critère de la pratique.

De la sorte, on établit à cette étape dans quelle mesure le modèle et l'objet de simulation s'accordent dans les limites de la précision de l'information initiale.

Deux cas peuvent se présenter ici.

1-er cas. Si les résultats de la comparaison sont insuffisants (situation ordinaire au stade initial de simulation), on passe au deuxième cycle du processus en précisant l'information d'entrée sur l'objet de simulation et, au besoin, en précisant l'énoncé du problème (1-ère étape), en précisant ou en dressant un nouveau modèle mathématique (2-ième étape), en résolvant le problème mathématique correspondant (3-ième étape) et, enfin, en reprenant la comparaison (4-ième étape).

2-ième cas. Si les résultats de la comparaison sont satisfaisants, le modèle est adopté. Lorsque dans la pratique des résultats sont utilisés à plus d'une reprise, le modèle doit être rendu propre au service. Supposons que

le but de la simulation était d'établir des plannings d'une entreprise industrielle. L'utilisation d'un modèle prévoit alors la collecte et le traitement de l'information, l'introduction de l'information traitée dans l'ordinateur, le calcul des plannings à partir des programmes établis et, enfin, la livraison des résultats sous une forme commode pour les utilisateurs, appliqués ensuite dans l'activité industrielle.

La préparation d'un modèle pour le service prévoit la conception des techniques mathématiques spéciales sans lesquelles l'utilisation d'un modèle est pratiquement impossible : il faut rédiger une bibliothèque de programmes assurant aux utilisateurs des relations commodes avec l'ordinateur en service et ne leur imposant pas d'être des mathématiciens très avertis.

En même temps, les techniques mathématiques, de même d'ailleurs que le modèle lui-même, doivent permettre des modernisations imposées par l'activité industrielle. Insistons sur le fait qu'il s'agit précisément de moderniser et non de rédiger des bibliothèques de programmes nouvelles. Ce n'est que sous ces conditions qu'on peut rendre régulière l'utilisation des modèles mathématiques et des ordinateurs dans le processus de commande.

1.2. Sur les modèles

Un cours de programmation mathématique prévoit entre autres la démonstration d'un grand nombre de théorèmes et l'analyse des méthodes variées de résolution des problèmes d'extrémum ; il peut donc sembler que dans des problèmes pratiques, le rôle d'un mathématicien se ramène à sa participation à la troisième étape du processus de simulation, alors que les autres étapes concernent des spécialistes dans le domaine des aspects non formalisés de l'objet de simulation. Cet état de choses a lieu en effet quelquefois, mais d'habitude une telle division de travail s'avère stérile. Il en est ainsi parce qu'un modèle n'est qu'une approximation des propriétés considérées et la précision de cette approximation doit s'accorder avec celle de l'information à l'entrée.

On voudrait souvent construire un modèle mathématique qui tiendrait compte d'un grand nombre de données d'entrée. Néanmoins, une analyse suivie montre que nombre d'entre elles n'influent pas sur la solution, ou bien cette influence est négligeable par suite de peu de précision des données d'entrée. En outre, il faut bien retenir qu'un modèle mathématique à paramètres nombreux conduit à un problème d'optimisation des fonctions de variables si nombreuses que dans des situations réelles la tentative de le résoudre numériquement avec une précision en accord avec celle de l'information d'entrée est tout à fait désespérée.

De cette façon, bien des conditions imposées aux modèles mathématiques rendent nécessaire, dès la deuxième étape de simulation, la participation des mathématiciens à la résolution des problèmes pratiques.

1.3. Classification et traits spécifiques

Dans la programmation mathématique on peut indiquer deux tendances. La première, parfaitement constituée, est la programmation mathématique elle-même ; elle traite des problèmes dans lesquels toute l'information initiale est complètement définie.

La deuxième, dite programmation stochastique, concerne les problèmes dans lesquels l'information comporte des éléments indéterminés, ou bien les problèmes dont certains paramètres sont aléatoires mais définis par des caractéristiques probabilistes connues. Tel est le cas, par exemple, des programmes d'activité industrielle établis souvent dans des conditions d'une information incomplète sur la situation réelle de leur réalisation. Ou, disons, celui d'un problème d'extrémum qui traduit le fonctionnement des instruments automatiques accompagné de perturbations aléatoires. Notons que l'une des plus grandes difficultés de la programmation stochastique réside dans la position du problème, surtout du fait que l'analyse de l'information initiale est très compliquée.

Voici les sections principales de la programmation mathématique devenues classiques.

Programmation linéaire : la fonction économique est linéaire ; l'ensemble sur lequel on cherche l'extrémum de cette fonction est donné par un système linéaire d'égalités et d'inégalités. La programmation linéaire comporte à son tour des classes des problèmes dont la structure permet d'établir des méthodes spéciales de leur résolution, bien plus avantageuses que celles relatives aux problèmes de forme générale. Ainsi on a vu apparaître dans la programmation linéaire la section des problèmes de transport.

Programmation non linéaire : la fonction économique et les contraintes sont non linéaires. D'après l'usage, la programmation non linéaire compte les divisions suivantes :

Programmation convexe : la fonction économique (s'il s'agit de la minimiser) et l'ensemble sur lequel on cherche à résoudre le problème d'extrémum sont convexes.

Programmation quadratique : la fonction économique est quadratique, les contraintes étant des égalités et des inégalités linéaires.

Problèmes à extrémums multiples : on relève d'ordinaire dans ce domaine des classes spéciales des problèmes très fréquents dans les applications, par exemple, les problèmes relatifs à la minimisation des fonctions concaves sur un ensemble convexe.

Programmation en nombres entiers, dans laquelle les variables sont soumises à la contrainte d'intégralité.

Quel est le caractère particulier des problèmes de programmation mathématique ?

En premier lieu, il est en général impossible d'appliquer à ces problèmes les méthodes de l'analyse classique portant sur la recherche des extrémums liés; il en est ainsi du fait que même dans le cas le plus simple, celui des

problèmes linéaires, ces problèmes admettent un extrémum aux points anguleux de la frontière de l'ensemble des contraintes, c'est-à-dire aux points où la dérivabilité est violée. De plus, dans l'analyse classique, la méthode la plus forte de résolution des problèmes d'extrémum (méthode des multiplicateurs de Lagrange) est établie pour le cas où l'ensemble des contraintes est donné par un système d'équations et non par un système d'inégalités.

Une autre particularité est que le nombre de variables et de contraintes des problèmes pratiques est si grand que si l'on traite simplement tous les points « suspects d'extrémalité », par exemple, tous les points anguleux d'un ensemble des contraintes, aucun ordinateur moderne ne serait en état de remplir cette tâche en des délais tant soit peu raisonnables.

D'après ce qui vient d'être dit, le but de la programmation mathématique est de fournir là où c'est possible des méthodes analytiques de résolution, ou, à défaut de telles méthodes, de créer des procédés de calcul efficaces pour obtenir une solution approchée.

Constatons, enfin, que le terme même « programmation mathématique » traduit le fait que la résolution de ses problèmes a pour objectif de choisir un programme d'action.

1.4. Exemples des modèles mathématiques

La théorie des modèles mathématiques fait l'objet d'un cours spécial; elle exige du lecteur, en premier lieu, la connaissance du domaine scientifique dont fait partie l'objet de la simulation.

Nous donnons ici des exemples classiques pour illustrer l'application de la méthode de simulation mathématique aux problèmes économiques.

Problème du restaurateur. D'après le choix donné des produits, la valeur nutritive de chacun d'eux étant connue de même que leur prix, composer des rations satisfaisant aux besoins tout en réduisant au minimum les frais.

Soient n aliments différents et m substances nutritives (par exemple, graisses, albumines, glucides, vitamines, etc.). Désignons par a_{ij} la teneur (en unités de poids) de la j-ième substance dans le i-ième aliment; par b_j la quantité quotidienne minimale nécessaire de la j-ième substance; enfin, par x_i la consommation quotidienne du i-ième aliment. Il est évident que $x_i \geqslant 0$.

La quantité $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$ est la teneur totale dans la ration de la j-ième substance, cette teneur ne devant pas être inférieure à la quantité minimale b_j :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Si c_i est le prix unitaire du i-ième aliment, le prix de toute la ration est défini par la forme linéaire $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Ainsi, l'énoncé mathématique du problème du restaurateur est : trouver

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sous les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons là un problème des plus classiques de la programmation linéaire.

La position du problème ne doit pas stipuler nécessairement que c'est un problème du restaurateur. Il est clair que ce même énoncé peut être associé à des problèmes multiples sur l'obtention des mélanges optimaux (« mélange » doit être entendu ici dans un sens généralisé : c'est aussi bien un mélange qu'un alliage, une ration, etc.).

Un autre exemple classique est celui du problème de transport. Il consiste à composer le programme du trafic d'un bien homogène de façon que le coût total du transport soit minimal.

Information initiale :

a_i la quantité du bien disponible à la i-ième origine ($i = 1, 2, \ldots, m$) ;

b_j la demande au j-ième point de destination ($j = 1, 2, \ldots, n$) ;

c_{ij} le coût unitaire du transport du bien de la i-ième origine à la j-ième destination.

Désignons par x_{ij} la quantité du bien expédié de l'origine i à la destination j.

Dans les notations choisies :

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ est le coût total du transport ;

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ la quantité du bien livré par la i-ième origine ;

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ la quantité du bien reçu par la j-ième destination.

Dans le plus simple des cas, voici les conditions évidentes à observer :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

De la sorte, un *problème de transport* s'énonce sous la forme mathématique suivante :

trouver

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sous les conditions

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce problème s'appelle *modèle de transport fermé.*

Constatons que la contrainte

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

est une condition naturelle de résolubilité du problème de transport fermé.

Un problème de forme plus générale est ce qu'on appelle un *modèle de transport ouvert* :

trouver

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sous les conditions

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Il est clair que ce problème ne suppose pas d'expédier tout entier le bien disponible de la i-ième origine.

Il existe quelques autres problèmes de contenu technique et économique qui cadrent bien avec le schéma du problème de transport ; tel est, par exemple, le problème « d'affectation » ou « de couplage » qui consiste à répartir de la façon la plus économique (dans le sens du temps total) n besognes entre n ouvriers, le temps nécessaire à chaque ouvrier pour accomplir sa besogne étant connu. Ce problème est un modèle particulier du problème de transport fermé pour $m = n$ et pour tout $a_i = b_j = 1$.

Notons que les solutions des problèmes de transport jouissent des

propriétés d'intégralité et c'est pourquoi on les rapporte aux problèmes de programmation linéaire pour lesquels l'intégralité est une contrainte supplémentaire nécessaire.

Problème du fonctionnement d'un système de production d'énergie électrique. A titre d'exemple d'un problème de programmation convexe considérons le plus simple des problèmes relatifs à un régime optimal du fonctionnement d'un système de production d'énergie électrique.

Soit un système de production d'énergie électrique isolé composé de centrales thermiques liées par des lignes de transmission au nœud de concentration de la charge. Il s'agit de distribuer les puissances à fournir par les centrales à un moment donné. La distribution s'effectue suivant le critère minimisant le débit du combustible nécessaire pour produire la quantité d'énergie requise.

Désignons par x_i la puissance produite par la i-ième centrale. Les puissances x_i varient de α_i à β_i, limites définies par le cahier des charges : $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$. De plus, il faut respecter les conditions du bilan énergétique, d'après lequel la quantité totale de l'énergie produite doit correspondre à l'énergie consommée P, compte tenu des pertes totales π dans les lignes de transmission

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P+\pi.$$

La quantité de combustible nécessaire pour produire l'énergie x_i est donnée par la fonction $T_i(x_i)$ convexe sur le segment $[\alpha_i, \beta_i]$.

Ainsi, le problème se met sous la forme :

trouver

$$\min \sum_{i=1}^{m} T_i(x_i)$$

sous les conditions

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P+\pi,$$

$$\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Un modèle ainsi construit constitue un *problème classique de programmation convexe avec contraintes linéaires*. Sa résolution fournit une approximation très grossière du régime optimal réel du fonctionnement d'un système de production d'énergie électrique. Dans une situation réelle, la charge n'est jamais concentrée en un seul point ; il faut donc envisager n nœuds. En outre, les pertes d'un système ne sont pas naturellement constantes, elles sont définies par la grandeur des énergies transmises et les paramètres des lignes de transmission.

En seconde approximation on peut examiner le problème dans lequel π est une fonction bilinéaire de x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) et où

les paramètres de commande x_{ij} indiquent l'énergie transmise de la i-ième centrale au j-ième nœud.

Il est évident que dans ce nouveau modèle il y aura des contraintes non linéaires ($\pi(x_{ij})$ dans l'équation du bilan).

Ceci également est un *problème de programmation convexe*, mais d'un type plus compliqué que le précédent.

Un exemple de problème à extrémums multiples est fourni par le problème de distribution le plus simple.

Soient m destinations (points de consommation) (1, 2, ..., j, ..., m) à volume donné de la demande b_j en chaque point. Il existe n origines (points de fabrication) possibles (1, 2, ..., i, ..., n) ; on connaît pour chaque i-ième origine la relation entre le coût de fabrication f_i et le volume de fabrication x_i. (Les frais généraux sont supposés inclus dans le coût de fabrication $f_i(x_i)$.) Enfin, on donne la matrice des coûts de transport a_{ij} (a_{ij} est le coût unitaire de transport du bien de la i-ième origine à la j-ième destination). On demande de trouver les volumes de transport x_{ij} du i-ième au j-ième point et les volumes de fabrication $x_i = \sum_j x_{ij}$ tels qu'ils minimisent les dépenses totales ; autrement dit, on cherche

$$\min \left[L(x_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}x_{ij} + \sum_i f_i(x_i) \right]$$

sous les conditions

$$\sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geqslant 0.$$

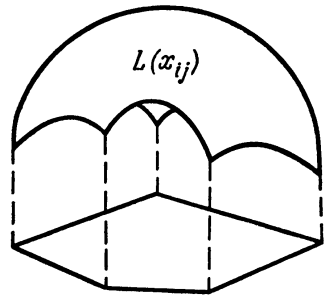

Fig. 1.1.

Puisque le prix de revient unitaire de la fabrication diminue avec l'augmentation de son volume, les fonctions $f_i(x_i)$ sont en général monotones, croissantes et convexes vers le haut. L'ensemble des valeurs de x_{ij} qui satisfont aux contraintes du problème forme un polyèdre convexe et, par conséquent, ses angles sont des points des minimums locaux de la fonction $L(x_{ij})$ (fig. 1.1). De là le nom du problème *à extrémums multiples.*

1.5. Notations principales

E_n espace euclidien de dimension n.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ vecteur colonne.}$$

$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vecteur ligne.

$x \in R$ x appartient à R.
$x \notin R$ x n'appartient pas à R.
$R \subset S$ R contenu dans S (inclusion).
$R \cap S$ intersection des ensembles R et S.
$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ intersection de la famille d'ensembles R_λ ($\lambda \in \Lambda$).
$R \cup S$ réunion des ensembles R et S.
$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ réunion de la famille d'ensembles R_λ ($\lambda \in \Lambda$).
$\varnothing$ ensemble vide.
$\{x: Q\}$ ensemble des éléments $x \in E_n$ qui vérifient la propriété Q.
$\{x \in Y: Q\}$ ensemble des éléments $x \in Y$ qui vérifient la propriété Q.
$R \setminus S$ différence des ensembles R et S, c'est-à-dire l'ensemble $\{x : x \in R, x \notin S\}$.
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ produit scalaire des vecteurs x et y.
$\| x \| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ norme euclidienne du vecteur x.
$\{x_k\}$ suite des points x_k.
$\{\alpha_k\}$ suite des nombres α_k.
$A = [a_{ij}]$ matrice $m \times n$.
$i = \overline{1, n}$ i passe par toutes les valeurs de 1 à n.
A^T transposée de la matrice A : $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, où

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{et} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}.$$

AB produit des matrices A et B:

$$C = [c_{ij}] = AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right].$$

B^{-1} inverse de la matrice carrée B.
$(Ax)_i$ i-ième composante du vecteur Ax.
$\det B$ déterminant de la matrice carrée B.
$x \geqslant y$ relation d'ordre dans E_n qui signifie que $x_i \geqslant y_i$ ($i = \overline{1, n}$).
$x > y$ signifie que $x_i > y_i$ ($i = \overline{1, n}$).
$x \neq y$ signifie que $x_i \neq y_i$ au moins pour un indice i.
$x \not\geqslant y$ signifie que $x_i \neq y_i$ ($i = \overline{1, n}$).
$[x, y]$ segment (intervalle fermé) d'extrémités x et y, c'est-à-dire ensemble $\{z: z = \alpha x + (1-\alpha) y, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.
$(x, y) = \{z: z = \alpha x + (1-\alpha) y, 0 < \alpha < 1\}$ intervalle ouvert.
$[x, y) = \{z: z = \alpha x + (1-\alpha) y, 0 < \alpha \leqslant 1\}$ intervalle semi-ouvert à droite.

$(x, y] = \{z: \quad z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leqslant \alpha < 1\}$ intervalle semi-ouvert à gauche.

$$\min\{\alpha, \beta\} = \begin{cases} \alpha, & \text{si} \quad \alpha \leqslant \beta, \\ \beta, & \text{si} \quad \alpha > \beta. \end{cases}$$

$\min\limits_{x \in X} \varphi(x)$ notation du problème de minimisation d'une fonction scalaire $\varphi(x)$ sur un ensemble X.

def symbole de définition et de notation. Par exemple, l'écriture $y \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ signifie que y désigne la somme $f(x)+g(x)$.

$\varphi'(x)$ gradient de la fonction $\varphi(x)$ au point x: $\varphi'(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$.

$\operatorname{diam} X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x', x'' \in X} \| x' - x'' \|$.

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \alpha \geqslant 0, \\ -1, & \text{si} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

$P\{Q\}$ probabilité de l'événement Q.

$P\{Q \mid R\}$ probabilité de l'événement Q sous la condition R.

$u \asymp v$ équivalence faible traduisant le fait que les grandeurs u et v sont du même ordre: $u = O(v)$ de même que $v = O(u)$.

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE L'ANALYSE CONVEXE

2.1. Espace euclidien. Ensembles convexes

Dans ce qui suit nous traiterons des fonctions définies sur des ensembles d'un espace euclidien*) E_n de dimension finie.

Une collection des points (vecteurs) $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n coordonnées réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'appelle *espace euclidien* de dimension n si les conditions suivantes sont vérifiées. Soient $x \in E_n$, $y \in E_n$ et α un nombre réel; alors

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \quad \text{(addition)},$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \quad \text{(multiplication par un nombre)},$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j \quad \text{(produit scalaire)}.$$

Dans un espace euclidien on introduit la notion de *norme euclidienne* (longueur d'un vecteur)

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2},$$

qui vérifie les relations

$$\| x \| \geqslant 0,$$

où l'égalité $\| x \| = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$;

$$\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|;$$

$$\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

La norme euclidienne et le produit scalaire sont liés par l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|.$$

---

*) Le lecteur désireux d'obtenir des renseignements détaillés sur un espace euclidien envisagé comme un espace linéaire muni de produit scalaire, n'a qu'à consulter, entre autres, [10] (chapitre 3, 4).

La norme euclidienne permet de définir dans E_n la notion de *convergence*. Nous dirons que la suite $\{x_k\}$ des points de E_n converge vers x pour $m \to \infty$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = x$, si

$$\lim_{m \to \infty} ||x_m - x|| = 0.$$

Donnons encore quelques définitions.

L'ensemble

$$U(x, \varepsilon) = \{y: \ ||y - x|| \leqslant \varepsilon\}$$

s'appelle *ε-voisinage* du point x.

Un ensemble $X \subset E_n$ est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites, c'est-à-dire les points tels qu'à tout voisinage de chacun d'entre eux appartient un nombre infini de points de X.

Un point $x \in X$ est dit *intérieur* à l'ensemble X s'il possède un voisinage dont tous les points appartiennent à X.

Un point $x \in X$ est appelé *point frontière* de l'ensemble X si tout voisinage de x contient aussi bien des points appartenant à X que des points qui ne lui appartiennent pas. L'ensemble de tous les points frontières de X est appelé *frontière* de X.

Un ensemble $X \in E_n$ est dit *convexe* si pour tout couple de points $x \in X$ et $y \in X$, le segment $[x, y]$ qui les relie lui appartient aussi.

La convexité de l'ensemble X signifie que $x, y \in X$ implique $z = \alpha x + (1-\alpha) y \in X$ pour tout $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Par exemple, un segment, une demi-droite, une droite, un cercle, un triangle, un demi-plan et le plan tout entier sont convexes dans E_2.

On voit aisément que si un ensemble X est donné par un système d'égalités et d'inégalités linéaires

$$X = \{x: \ Ax \geqslant a, \qquad Bx = b\},$$

où A et B sont des matrices, il est convexe et fermé (cette dernière propriété résulte de la linéarité et, donc, de la continuité des transformations de A et B).

2.2. Projection d'un point sur un ensemble. Propriétés

Définition. On appelle *projection* d'un point v sur un ensemble convexe X un point $p = p(v)$ de X tel que

$$||p - v|| = \inf_{x \in X} ||x - v|| \stackrel{\text{def}}{=} \delta. \tag{2.1}$$

On dit que δ est la *distance* de v à X.

Théorème 2.1. *Quels que soient l'ensemble convexe fermé X et le point v, il existe un point unique $p \in X$, projection de v sur X.*

Démonstration. Si $v \in X$, il est évident que $p = v$ et $\delta = 0$. Soit v un point extérieur par rapport à X: $v \notin X$. D'après la définition de la

borne inférieure, il existe une suite $\{x_k\}$, $x_k \in X$, telle que

$$\lim_{k \to \infty} ||x_k - v|| = \delta.$$

Etant donné que $\{x_k\}$ est bornée, il existe une sous-suite $\{x_{k_i}\}$ telle que

$$\lim_{i \to \infty} x_{k_i} = p \in X;$$

par conséquent,

$$||p - v|| = \delta.$$

Pour démontrer l'unicité supposons qu'il existe des points $p' \in X$ et $p'' \in X$, $p' \neq p''$, tels que

$$||p' - v|| = ||p'' - v|| = \delta.$$

Comme l'ensemble X est convexe, le point $z = \frac{1}{2}(p' + p'')$ appartient à X; mais le théorème de Pythagore entraîne

$$||z - v||^2 < \frac{1}{2}||p' - v||^2 + \frac{1}{2}||p'' - v||^2 = \delta^2,$$

ce qui contredit la définition de δ.

Théorème 2.2. *Pour qu'un point $p \in X$ soit projection d'un point v sur un ensemble convexe fermé X, il faut et il suffit que tout $x \in X$ vérifie l'inégalité*

$$\langle x - p, v - p \rangle \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Démonstration. Soit p la projection du point v sur X. Prenons un point arbitraire $x \in X$ et examinons $z = \alpha x + (1-\alpha)p$. La convexité de X fait que quel que soit $\alpha \in [0, 1]$ le point z appartient à X. Puisque

$$||z - v||^2 = \alpha^2 ||x - p||^2 + 2\alpha \langle x - p, p - v \rangle + ||p - v||^2,$$

et

$$||z - v||^2 \geqslant ||p - v||^2,$$

on a

$$\alpha^2 ||x - p||^2 + 2\alpha \langle x - p, p - v \rangle \geqslant 0.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\alpha \in [0, 1]$, il vient

$$\langle x - p, p - v \rangle \geqslant 0,$$

d'où l'on déduit (2.2).

Supposons maintenant que (2.2) soit vérifiée. Alors, quel que soit $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} ||x - v||^2 &= ||(x - p) + (p - v)||^2 = \\ &= ||x - p||^2 + 2\langle x - p, p - v \rangle + ||p - v||^2 \geqslant ||p - v||^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire p est la projection de v sur X.

Corollaire 2.2. *Quel que soit* $x \in X$,

$$\langle x-v, x-p\rangle = \langle x-p, x-p\rangle + \langle p-v, x-p\rangle \geqslant \|x-p\|^2$$

et

$$\|x-p\| \leqslant \|x-v\|.$$

Ceci résulte du fait que

$$\|x-v\|^2 = \|(x-p)+(p-v)\|^2 = \\ = \|x-p\|^2 + 2\langle x-p, p-v\rangle + \|p-v\|^2 \geqslant \|x-p\|^2.$$

2.3. Théorèmes de séparation

On appelle *hyperplan* dans E_n un ensemble de la forme

$$\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \lambda\},$$

où $c \neq 0$. Dans l'espace E_n un hyperplan définit deux demi-espaces

$$\{x: \langle c, x\rangle \leqslant \lambda\} \quad \text{et} \quad \{x: \langle c, x\rangle \geqslant \lambda\}.$$

Théorème 2.3. *Si X est un ensemble convexe dans E_n, par tout point v extérieur à la fermeture $\overline{X}$ de l'ensemble X passe un hyperplan $\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \lambda\}$, tel que*

$$\langle c, v\rangle = \lambda \tag{2.3}$$

et pour tout $x \in X$,

$$\langle c, x\rangle < \lambda. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit p la projection du point v sur $\overline{X}$. Considérons l'hyperplan

$$\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \lambda, \quad c = v-p, \quad \lambda = \langle c, v\rangle\},$$

qui vérifie (2.3). L'inégalité (2.2) entraîne

$$\langle x, v-p\rangle \leqslant \langle p, v-p\rangle < \langle v, v-p\rangle, \quad (x \in X \subset \overline{X}).$$

La deuxième inégalité se déduit de (2.1) et du fait que $\delta > 0$. Finalement, on a

$$\langle c, x\rangle = \langle v-p, x\rangle < \langle v-p, v\rangle = \langle c, v\rangle = \lambda,$$

c'est-à-dire (2.4).

Remarque. Le sens géométrique du théorème est évident : il existe un hyperplan π passant par v et tel que X appartient à l'un des demi-espaces définis par π (fig. 2.1).

Théorème 2.4. *Par tout point frontière x^0 d'un ensemble convexe X passe un hyperplan d'appui, c'est-à-dire il existe $c \neq 0$ et λ tels que $\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \lambda\}$,*

$$\lambda = \langle c, x^0\rangle \tag{2.5}$$

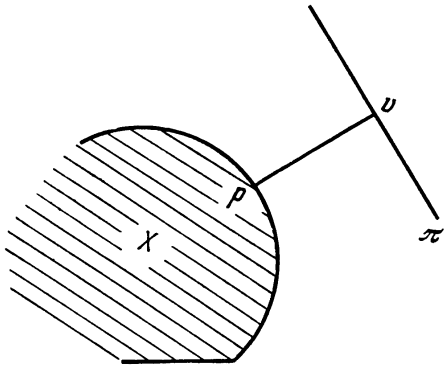

Fig. 2.1

et pour tout $x \in X$

$$\langle c, x\rangle \leqslant \lambda. \tag{2.6}$$

Démonstration. Considérons la suite des points $\{v_k\}$ extérieurs à $\bar{X}$, fermeture de X, et tels que

$$\lim_{k\to\infty} v_k = x^0.$$

D'après le théorème 2.3, par tout v_k passe un

$$\pi_k = \{x: \langle c_k, x\rangle = \lambda_k\},$$

où $\lambda_k = \langle c_k, v_k\rangle$ et $\langle c_k, x\rangle < \lambda_k$ pour tout $x \in X$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $\|c_k\| = 1$. Toujours dans les mêmes notations, nous allons supposer que

$$\lim_{k\to\infty} c_k = c.$$

En passant à la limite dans les relations déterminant π_k, on obtient

$$\langle c, x^0\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle c_k, v_k\rangle \overset{\text{def}}{=} \lambda$$

et $\langle c, x\rangle \leqslant \lambda$ pour tout $x \in X$.

Ainsi, $\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \lambda\}$ est un hyperplan d'appui.

Remarque. On voit aisément que s'il existe en x^0 un hyperplan tangent, il coïncide avec l'hyperplan d'appui (fig. 2.2), et, dans ce cas, l'hyperplan d'appui est unique. Toutefois, la notion d'hyperplan d'appui est bien plus large que celle d'hyperplan tangent. La figure 2.3 représente

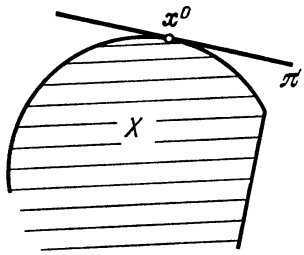

Fig. 2.2

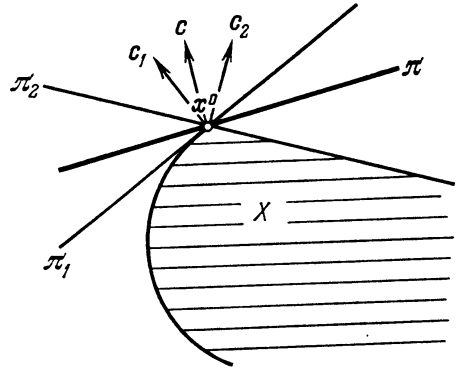

Fig. 2.3

le cas où en x^0 il n'existe pas de tangente, bien que par ce point passent des droites d'appui ; de plus, on peut choisir ici comme vecteur c tout vecteur qui se trouve « entre » c_1 et c_2.

Théorème 2.5. *Si l'ensemble X_0 des points intérieurs d'un ensemble convexe X est non vide et ne coupe pas un ensemble convexe $Y (X_0 \cap Y = \varnothing)$, pour X et Y il existe un hyperplan de séparation π, c'est-à-dire un vecteur $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ tel que*

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$$

quels que soient $\boldsymbol{y} \in Y$ et $\boldsymbol{x} \in X$.

Démonstration. L'ensemble

$$Z = \{z:\ z = y - x, \quad y \in Y, \quad x \in X_0\}$$

est convexe et $z = \mathbf{0}$ n'est pas son point intérieur. Les théorèmes 2.3 et 2.4 conduisent alors à l'existence de $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{c}, \mathbf{0} \rangle = 0$$

quels que soient $y \in Y$ et $x \in X_0$. Cette inégalité reste vraie également quels que soient $y \in Y$ et $x \in X$, du fait que le passage à la limite conserve les inégalités non strictes.

2.4. Points anguleux. Théorème de représentation

Définition. Un point x d'un ensemble X est dit *anguleux* (ou *extrémal*) s'il n'existe pas dans X des points x' et x'', $x' \neq x''$ tels que

$$x = \alpha x' + (1-\alpha)\, x''$$

pour un certain $\alpha \in (0, 1)$.

Par exemple, pour un cercle, tout point de la circonférence qui le délimite est un point anguleux. Les sommets d'un polyèdre convexe sont tous des points anguleux.

Définition. Un point x s'appelle *combinaison convexe* des points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ s'il existe des nombres $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, N})$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Exemple. Tout point intérieur d'un cercle est une combinaison convexe des extrémités d'une corde qui passe par le point x.

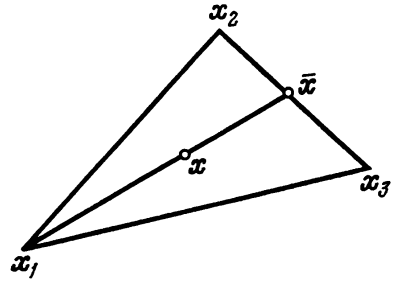

Fig. 2.4

Exemple. On voit sans peine (fig. 2.4) que tout point x d'un triangle est une combinaison convexe de ses sommets x_1, x_2 et x_3:

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, \bar{x}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$
$$\bar{x} = \beta x_2 + (1-\beta)\, x_3, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

d'où

$$x = \alpha x_1 (1-\alpha)\, \beta x_2 + (1-\alpha)(1-\beta)\, x_3$$

et

$$\alpha+(1-\alpha)\beta+(1-\alpha)(1-\beta) = 1.$$

Théorème 2.6. (de représentation). *Tout point x^0 d'un ensemble convexe fermé borné X peut être mis sous la forme d'une combinaison convexe d'un nombre fini de points anguleux de cet ensemble.*

Démonstration (par récurrence sur la plus petite dimension n de l'espace E_n contenant l'ensemble X).

Si $n = 1$, X est un segment et la proposition est évidente.

Supposons que le théorème soit vrai pour $n = k-1$. Soit, maintenant, $X \subset E_k$. Considérons deux cas.

1) x^0 est un point frontière de X. Construisons en ce point un hyperplan d'appui à X :

$$\pi = \{x: \langle c, x\rangle = \langle c, x^0\rangle\}.$$

L'ensemble $X_0 = X \cap \pi$, intersection de l'ensemble convexe borné X avec un ensemble convexe fermé π, est lui-même un ensemble convexe fermé et borné ; d'autre part, il existe un sous-ensemble de dimension $(k-1)$ contenant X_0 (puisque $X_0 \subset \pi$). D'après l'hypothèse de récurrence, pour $x^0 \in X_0$ il existe des points anguleux $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de X_0 tels que

$$x^0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i, \qquad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N}),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Montrons que les points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sont également des points anguleux de X. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour un certain point x_i il existe des points $x' \in X$, $x'' \in X$, $x' \neq x''$ et un nombre $\alpha \in (0, 1)$ tels que

$$x_i = \alpha x' + (1-\alpha)\, x''. \tag{2.7}$$

Etant donné que $x_i \in X_0 \subset \pi$, on a

$$\langle c, x_i\rangle = \langle c, x^0\rangle, \tag{2.8}$$

et comme π est un hyperplan d'appui à X, il vient

$$\langle c, x'\rangle \leqslant \langle c, x^0\rangle \quad \text{et} \quad \langle c, x''\rangle \leqslant \langle c, x^0\rangle. \tag{2.9}$$

Le fait que $0 < \alpha < 1$ entraîne avec (2.7), (2.8) et (2.9)

$$\langle c, x'\rangle = \frac{1}{\alpha}[\langle c, x_i\rangle - (1-\alpha)\langle c, x''\rangle] \geqslant \frac{1}{\alpha}[\langle c, x^0\rangle - (1-\alpha)\langle c, x^0\rangle] = \langle c, x^0\rangle. \tag{2.10}$$

Les inégalités (2.9) et (2.10) montrent que $x' \in \pi$ (puisque $\langle c, x'\rangle = \langle c, x^0\rangle$) ; mais $x' \in X$; par conséquent, $x' \in X_0 = X \cap \pi$. D'une façon analogue on prouve que $x'' \in X_0$. Mais alors l'hypothèse (2.7) contredit le fait que x_i est un point anguleux de X_0.

2) Soit maintenant x^0 un point intérieur de l'ensemble X. Menons par x^0 une droite l. L'intersection $l \cap X$ est un segment d'extrémités $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$, qui appartiennent à la frontière de X ; comme x^0 est un point intérieur de X, il existe un $\alpha \in (0, 1)$ tel que

$$x^0 = \alpha \bar{x} + (1-\alpha)\,\bar{\bar{x}}. \tag{2.11}$$

Le théorème étant vrai pour les points frontières $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$, il l'est également pour x^0. En effet, les points frontières vérifient les relations

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N_1}),$$

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i z_i, \quad \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i = 1, \quad \gamma_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N_2}),$$

où tout y_i et tout z_i sont des points anguleux de l'ensemble X. Alors,

$$x^0 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha\beta_i y_i + \sum_{i=1}^{N_2} (1-\alpha)\gamma_i z_i,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Problème 2.4. Montrer que quel que soit le point d'un cube de dimension n

$$U = \{x : |x_i| \leqslant \delta \quad (i = \overline{1, n})\},$$

il peut être mis sous la forme d'une combinaison convexe des sommets de ce cube.

2.5. Théorème de Farkas. Cône

Le théorème qui suit joue un rôle important dans la programmation mathématique ; il est vrai pour toute matrice B de type $m \times n$ et pour tout vecteur v de dimension n.

Théorème 2.7 (de Farkas). *Si l'inégalité*

$$\langle v, x \rangle \leqslant 0$$

est vraie pour tout x vérifiant la condition

$$Bx \leqslant 0,$$

il existe toujours un vecteur $u \geqslant 0$ tel que

$$v = B^T u.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$W = \{w : w = B^T u, \quad u \geqslant 0\}.$$

Si $v \in W$, le théorème est démontré. Supposons que $v \notin W$. Prouvons que dans ce cas il existe un x tel que $Bx \leqslant 0$; mais $\langle v, x \rangle > 0$. Or c'est là une contradiction aux conditions qui démontre le théorème.

Considérons le vecteur $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$, où $\boldsymbol{p}$ est la projection du point $\boldsymbol{v}$ sur W. Le théorème 2.3 entraîne que pour tout $\boldsymbol{w} \in W$ on a

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} \rangle < \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} \rangle. \tag{2.12}$$

Mais on déduit de (2.2) que $\langle \boldsymbol{w} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{p} \rangle \leqslant 0$, c'est-à-dire

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p} \rangle. \tag{2.13}$$

Puisque $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \in W$, (2.12) conduit à l'inégalité

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} \rangle > 0, \tag{2.14}$$

et comme $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{p} \in W$, on obtient de (2.13)

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{p} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p} \rangle,$$

c'est-à-dire $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} \rangle \leqslant 0$. Mais

$$\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, B^T \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, B\boldsymbol{c} \rangle \leqslant 0.$$

Comme il en est ainsi pour tout $\boldsymbol{u} \geqslant 0$, il vient

$$B\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{0}. \tag{2.15}$$

En posant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, (2.14), (2.15) conduisent à une contradiction aux conditions du théorème.

R e m a r q u e. Le théorème est démontré sous l'hypothèse tacite que l'ensemble W est fermé (la fermeture assure l'existence du point $\boldsymbol{p} \in W$). L'ensemble W est fermé en effet, ce que nous démontrerons au paragraphe suivant.

Avant de donner une interprétation géométrique du théorème de Farkas, introduisons la notion de cône.

D é f i n i t i o n. Un ensemble $K \subset E_n$ est appelé *cône* si $\boldsymbol{x} \in K$ implique $\lambda \boldsymbol{x} \in K$ pour tout $\lambda \geqslant 0$.

Il est évident que l'ensemble

$$K = \{\boldsymbol{x} : B\boldsymbol{x} \leqslant 0\}$$

est un cône. De plus, cet ensemble étant convexe et fermé, le cône lui aussi est convexe et fermé.

Par exemple, dans le cas bidimensionnel (fig. 2.5), si

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \boldsymbol{b}_3^T \end{bmatrix},$$

alors

$$K = \{\boldsymbol{x} : B\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{0}\}$$

est l'ensemble de tous les vecteurs $\boldsymbol{x}$ qui forment avec chaque vecteur $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ des angles non aigus (sur la figure 2.5, le cône K est hachuré par des

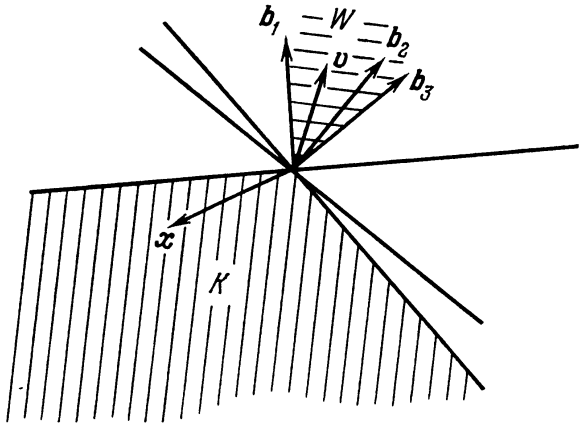

Fig. 2.5

traits verticaux). L'ensemble

$$W = \{w : w = B^T u, \quad u \geqslant 0\}$$

est également un cône convexe.

Maintenant le sens géométrique du théorème de Farkas est clair : pour que la condition $\langle v, x\rangle \leqslant 0$ soit respectée quel que soit $x \in K$ (c'est-à-dire pour que l'angle compris entre v et x ne soit pas aigu), il faut que v appartienne au cône W.

2.6. Théorème de fermeture d'un cône

Le théorème de fermeture d'un cône est démontré en s'appuyant sur deux propositions connues que nous allons énoncer sous la forme de lemmes.

L e m m e 2.1. *La réunion*

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$$

d'un nombre fini d'ensembles fermés X_i est fermée.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \notin X$. Montrons qu'il existe un voisinage du point x tel qu'il contient au plus un nombre fini de points de X et, par suite, x ne peut être point limite de X.

Comme $x \notin X$, x n'appartient à aucun des ensembles fermés X_i et donc n'est point limite d'aucun de ces ensembles. Il existe donc pour chaque i un voisinage de x qui contient au plus un nombre fini de points de X_i. En choisissant le plus petit de ces voisinages, on obtient un voisinage de x contenant au plus un nombre fini de points de X.

L e m m e 2.2. *Si les colonnes (les vecteurs colonnes) de la matrice A sont linéairement indépendantes, la transformation linéaire $y = Ax$ est une application de l'ensemble fermé X sur l'ensemble fermé Y.*

Démonstration. Puisque la matrice A^TA est régulière, $A^Ty = A^TAx$ entraîne

$$x = (A^TA)^{-1}A^Ty.$$

La fermeture de Y résulte de la relation

$$\lim_{n\to\infty}(A^TA)^{-1}A^Ty_n = (A^TA^{-1})A^T\lim_{n\to\infty}y_n = \lim_{n\to\infty}x_n = (A^TA)^{-1}A^Ty^0 = x^0$$

pour la suite convergente $\{y_n\} \to y^0 = Ax^0$.

Théorème 2.8 (de fermeture d'un cône). *L'ensemble*

$$Y = \{y : y = Ax,\ x \geqslant 0\}$$

est un ensemble fermé.

Démonstration. Soit $A_{is} = [a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}]$ un sous-système linéairement indépendant de vecteurs de $A = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Le nombre de tels sous-systèmes de dimension $s \leqslant k$ est fini (ne dépasse pas C_k^s). Considérons toutes sortes de sous-systèmes de vecteurs linéairement indépendants de la forme A_{is} ($s = \overline{1, k}$). Leur nombre est également fini $\left(\text{non supérieur à } \sum_{s=1}^{k} C_k^s = 2^k\right)$. Introduisons la notation

$$Y_{is} = \left\{y : y = \sum_{l=1}^{s} a_{i_l}x_{i_l},\quad x_{i_l} \geqslant 0\quad (l = \overline{1, s})\right\}$$

et considérons la réunion de tous les ensembles de cette forme :

$$\tilde{Y} = \bigcup_i \bigcup_s Y_{is}.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\tilde{Y} = Y$, les lemmes précédents impliquant que $\tilde{Y}$ est fermé.

Il est évident que $\tilde{Y} \subseteq Y$, puisque si $y \in \tilde{Y}$, il existe un Y_{is} tel que $y \in Y_{is} \subseteq Y$. Il reste à montrer que $Y \subseteq \tilde{Y}$.

Examinons un vecteur arbitraire $y \in Y$. Comme $y = 0 \in Y$ et $y = 0 \in \tilde{Y}$, il suffit d'examiner le cas $y \neq 0$. Ainsi,

$$y = \sum_{i=1}^{k} x_ia_i,\quad x_i \geqslant 0\quad (i = \overline{1, k}).$$

Sans restreindre la généralité, on peut admettre que les premiers l nombres $x_1, x_2, \ldots, x_l$ sont strictement positifs ($1 \leqslant l \leqslant k$), alors que $x_{l+1} = x_{l+2} = \ldots = x_k = 0$. Il vient

$$y = \sum_{i=1}^{l} x_ia_i,\quad x_i > 0\quad (i = \overline{1, l}).$$

Si les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_l$ sont linéairement indépendants, on a $y \in \tilde{Y}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_l$ des vecteurs linéairement indépendants, c'est-à-

dire il existe des nombres α_i $(i = \overline{1, l})$ tels que

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^2 > 0.$$

Pour fixer les idées, supposons que les premiers m nombres $\alpha_i \neq 0$ $(i = \overline{1, m})$, alors que

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_l = 0 \quad (m \leqslant l).$$

Notons $I = \{i : \alpha_i > 0\}$. Il est évident que $I \neq \varnothing$, car dans le cas contraire, au lieu de $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$ nous examinerons $\sum_{i=1}^{m} (-\alpha_i)\, a_i = \mathbf{0}$. Soit

$$\lambda = \min_{i \in I} \frac{x_i}{\alpha_i} > 0.$$

On peut supposer sans limiter la généralité que $\lambda = x_1/\alpha_1$. Alors,

$$y = \sum_{i=1}^{l} x_i a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \sum_{i=m+1}^{l} x_i a_i - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - \lambda\alpha_i) a_i + \sum_{i=m+1}^{l} x_i a_i = \sum_{i=2}^{m} (x_i - \lambda\alpha_i)\, a_i + \sum_{i=m+1}^{l} x_i a_i = \sum_{i=2}^{l} \beta_i a_i,$$

où

$$\beta_i = \begin{cases} x_i - \lambda\alpha_i & \text{pour} \quad i = \overline{1, m}, \\ x_i & \text{pour} \quad i = \overline{m+1, l} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{2, l}).$$

Si le système $a_2, a_3, \ldots, a_l$ est linéairement indépendant, on a $y \in \tilde{Y}$. Si les vecteurs $a_2, a_3, \ldots, a_l$ sont linéairement dépendants, en reprenant les calculs, on élimine de ce système au moins encore un vecteur, par exemple a_2, de sorte que

$$y = \sum_{i=3}^{l} \gamma_i a_i, \quad \gamma_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{3, l}).$$

En reprenant encore la procédure, on aboutit après un nombre fini de pas au cas où

$$y = \sum_{i=p}^{l} \delta_i\, a_i, \quad \delta_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{p, l})$$

et où $a_p, a_{p+1}, \ldots, a_l$ sont linéairement indépendants, ce qui donne $y \in \tilde{Y}$, et donc, $Y \subseteq \tilde{Y}$.

2.7. Fonctions convexes et concaves

Définition. On dit qu'une fonction scalaire $\varphi(x)$ est *convexe* sur un ensemble convexe X si, quels que soient $x, y \in X$ et $\alpha \in [0, 1]$, on a l'inégalité

$$\varphi[\alpha x + (1-\alpha) y] \leqslant \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y). \tag{2.16}$$

Par contre, si

$$\varphi[\alpha x+(1-\alpha)y] \geqslant \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y), \tag{2.17}$$

la fonction $\varphi(x)$ est dite *concave.*

La figure 2.6 représente une fonction convexe. Il est clair que si $\varphi(x)$ est convexe, $-\varphi(x)$ est concave.

Si quel que soit $\alpha \in (0, 1)$ l'inégalité (2.16) est stricte, la fonction $\varphi(x)$ est dite *strictement convexe* (resp. *strictement concave* pour (2.17)).

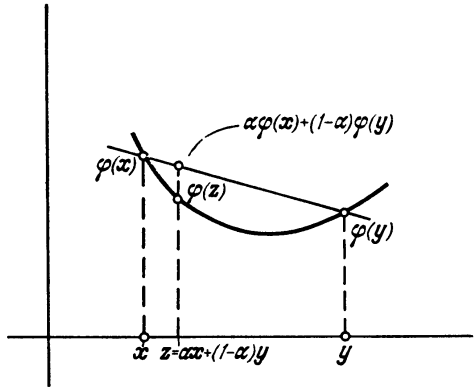

Fig. 2.6

Quelquefois, pour simplifier les calculs des démonstrations, on utilise la définition suivante : une fonction continue $\varphi(x)$ est *convexe* sur un ensemble convexe X si, quels que soient $x, y \in X$, on a la condition

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(y).$$

On voit sans peine que la somme des fonctions convexes (concaves) est une fonction convexe (concave).

Un exemple de fonction convexe est fourni par une fonction quadratique à matrice définie positive. Cette propriété des formes quadratiques étant utilisée dans ce qui suit, énonçons-la comme un théorème indépendant.

Théorème 2.9. *Pour qu'une fonction quadratique*

$$\varphi(x) = \langle x, Bx\rangle+\langle p, x\rangle$$

soit convexe, il faut et il suffit que la matrice symétrique B soit définie positive.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\varphi[\alpha x+(1-\alpha)y] &= \alpha^2\langle x, Bx\rangle+2\alpha(1-\alpha)\langle x, By\rangle+\\ &+(1-\alpha)^2\langle y, By\rangle+\alpha\langle p, x\rangle+(1-\alpha)\langle p, y\rangle =\\ &= \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\langle x-y, B(x-y)\rangle\end{aligned}$$

et pour $\alpha \in (0, 1)$, on a

$$\alpha(1-\alpha)\langle x-y, B(x-y)\rangle \geqslant 0$$

si et seulement si B est définie positive. Ce qui conduit avec la définition de la convexité à notre proposition.

Remarque. Il est évident que pour que la fonction quadratique $\varphi(x)$ soit strictement convexe, il faut et il suffit que la matrice B soit strictement définie positive.

2.8. Dérivabilité suivant une direction. Continuité

Démontrons les propriétés suivantes des fonctions convexes.

Une fonction $\varphi(x)$ convexe sur un ensemble convexe X admet en un point intérieur $x \in X$ quel qu'il soit une dérivée suivant une direction quelconque $s(\|s\| = 1)$:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial s} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi(x+\lambda s)-\varphi(x)}{\lambda};$$

de plus, en tout point intérieur $x \in X$, la fonction $\varphi(x)$ est continue. Ces propositions ne sont pas vraies, pourtant, pour les points frontières de X. En effet, sur le segment [0, 1], la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 2 & \text{pour} \quad x = 1 \end{cases}$$

est convexe, mais en $x = 1$ elle admet une discontinuité.

Théorème 2.10. *Une fonction convexe $\varphi(x)$ définie sur un ensemble convexe X admet en chaque point intérieur $x \in X$ une dérivée suivant toute direction s :*

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial s} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi(x+\lambda s)-\varphi(x)}{\lambda}.$$

Démonstration. Etablissons d'abord que la fonction convexe $\psi(\lambda)$ définie dans un intervalle Λ est telle que, pour $\lambda > \lambda_0$ et $\lambda \to \lambda_0$, la grandeur

$$\frac{\psi(\lambda)-\psi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$$

décroisse monotonement et soit bornée inférieurement.

En effet, soient $\lambda_2 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda$. Comme

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\lambda + \left(1 - \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right)\lambda_0,$$

la convexité de $\psi(\lambda)$ conduit à

$$\psi(\lambda_1) \leqslant \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\psi(\lambda) + \left(1 - \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right)\psi(\lambda_0),$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\psi(\lambda)-\psi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} \geqslant \frac{\psi(\lambda_1)-\psi(\lambda_0)}{\lambda_1-\lambda_0},$$

c'est-à-dire que la grandeur considérée décroît monotonement.

Ensuite, comme

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_0-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2}\lambda + \left(1-\frac{\lambda_0-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2}\right)\lambda_2,$$

la convexité de $\psi(\lambda)$ entraîne

$$\psi(\lambda_0) \leqslant \frac{\lambda_0-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2}\psi(\lambda) + \left(1-\frac{\lambda_0-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2}\right)\psi(\lambda_2) = \frac{\lambda_0-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2}\psi(\lambda) + \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\lambda_2}\psi(\lambda_2),$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\psi(\lambda)-\psi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} \geqslant \frac{\psi(\lambda_0)-\psi(\lambda_2)}{\lambda_0-\lambda_2},$$

c'est-à-dire que la grandeur considérée est bornée.

Ainsi, quel que soit le point λ_0 de l'intervalle Λ, il existe une dérivée à droite

$$\lim_{\lambda \to +\lambda_0} \frac{\psi(\lambda)-\psi(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \left.\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}^{+}.$$

Notons que l'existence d'une dérivée à gauche de la fonction $\psi(\lambda)$ se démontre d'une façon analogue.

Supposons, enfin, qu'on ait donné en $x \in X$ une direction s. Considérons

$$\psi(\lambda) = \varphi(x+\lambda s).$$

Si x est un point intérieur de l'ensemble X, il existe un intervalle $\Lambda = (-\lambda', \lambda')$ dans lequel $\psi(\lambda)$ est définie en chaque point. Il est clair que $\psi(\lambda)$ est convexe ; il existe donc une dérivée à droite

$$\left.\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}^{+} = \frac{\partial\varphi(x)}{ds},$$

de même qu'une dérivée à gauche

$$\left.\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}^{-} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial(-s)}.$$

Lemme 2.3. *Si $\varphi(x)$ est convexe et si*

$$x = \sum_{i=1}^{N} \beta_i s_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N}),$$

il vient

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{N} \beta_i s_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \beta_i \varphi(s_i).$$

Démonstration. Procédons par récurrence. Pour $N = 1$ le lemme est évident. Supposons qu'il soit vrai pour $N = k$. Prouvons-le pour $N = k+1$.

Pour $\beta_{k+1} = 1$, on a $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$.

Si $0 \leqslant \beta_{k+1} < 1$, la convexité et l'hypothèse de récurrence entraînent

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i s_i\right) = \varphi\left[(1-\beta_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} s_i + \beta_{k+1} s_{k+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1-\beta_{k+1})\, \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} s_i\right) + \beta_{k+1} \varphi(s_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\beta_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{1-\beta_{k+1}} \varphi(s_i) + \beta_{k+1} \varphi(s_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \varphi(s_i).$$

Théorème 2.11. *Une fonction convexe $\varphi(x)$ définie sur un ensemble convexe X est continue en tout point intérieur de cet ensemble.*

Démonstration. Soit x^0 un point intérieur de l'ensemble X. Effectuons la translation de l'origine des coordonnées en x^0 et notons $\psi(y) = \varphi(y + x^0)$. Il est évident que $\varphi(y)$ est convexe et que $\mathbf{0}$ est un point intérieur de l'ensemble convexe

$$Y = \{y : y = x - x^0,\ x \in X\};$$

il existe donc un $\delta_0 > 0$ tel que pour $0 < \delta \leqslant \delta_0$ le voisinage

$$U = \{y : \|y\|_{\mathrm{I}} \leqslant \delta\}$$

du point $\mathbf{0}$ appartienne à l'ensemble Y: $U \subset Y$. Choisissons une norme $\|\ \|_{\mathrm{I}}$ de façon que

$$\|y\|_{\mathrm{I}} = \max_i |y_i|;$$

alors, l'ensemble U représente un cube de dimension n et de sommets s_i:

$$\|s_i\|_{\mathrm{I}} = \delta \quad (i = \overline{1, N},\ N = 2^n).$$

Tout point y d'un cube de dimension n est représentable (théorème 2.6 ; cf. également problème 2.4) sous la forme d'une combinaison convexe des sommets

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i s_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N}).$$

En vertu du lemme 2.3,

$$\psi(y) - \psi(\mathbf{0}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s_i\right) - \psi(\mathbf{0}) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \psi(s_i) - \psi(\mathbf{0}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [\psi(s_i) - \psi(\mathbf{0})] \leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, |\psi(s_i) - \psi(\mathbf{0})|.$$

La dérivabilité de $\psi(y)$ en $\mathbf{0}$ suivant toute direction entraîne que pour tout s_i il existe un $\delta_i > 0$ tel que pour tout $0 < \delta \leqslant \delta_i$

$$|\psi(s_i) - \psi(\mathbf{0})| < \varepsilon.$$

En posant

$$\bar{\delta} = \min \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N\},$$

on obtient

$$\psi(y) - \psi(0) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varepsilon = \varepsilon.$$

Mais outre le point y, l'ensemble U contient encore le point $-y$; on obtient donc par analogie avec ce qui précède :

$$\psi(-y) - \psi(0) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\psi(y)$ est une fonction convexe, on a

$$\psi(0) \leqslant \frac{1}{2}\psi(y) + \frac{1}{2}\psi(-y),$$

d'où

$$\psi(0) - \psi(y) \leqslant \psi(-y) - \psi(0).$$

Ainsi, on aboutit finalement à l'inégalité

$$|\psi(y) - \psi(0)| \leqslant \varepsilon,$$

vraie pour tout $y \in \{y : \|y\|_I \leqslant \bar{\delta}\}$.

$\psi(y)$ étant continue en 0, on a la continuité de $\varphi(x)$ en x^0.

2.9. Fonctions convexes dérivables

Le lemme suivant établit une propriété importante des fonctions dérivables qui nous sera utile dans tout ce qui suit.

L e m m e 2.4. *Une fonction $\varphi(x)$ dérivable sur un ensemble convexe fermé X est convexe si et seulement si, quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$, on a*

$$\langle \varphi'(x), y - x \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x). \tag{2.18}$$

Pour une fonction concave:

$$\langle \varphi'(x), y - x \rangle \geqslant \varphi(y) - \varphi(x). \tag{2.19}$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour $\varphi(x)$ écrivons la condition (2.16) sous la forme suivante

$$\varphi[x + \beta(y - x)] \leqslant \varphi(x) + \beta[\varphi(y) - \varphi(x)] \quad \text{pour} \quad 0 < \beta \leqslant 1,$$

d'où

$$\frac{\varphi[x + \beta(y - x)] - \varphi(x)}{\beta} \leqslant \varphi(y) - \varphi(x),$$

et en passant à la limite pour $\beta \to 0$, on obtient (2.18). A cet effet, il suffit de considérer la fonction d'une variable

$$\psi(\beta) = \varphi[x + \beta(y - x)].$$

Le premier membre de la dernière inégalité se met alors sous la forme

$$\frac{1}{\beta}[\psi(\beta)-\psi(0)].$$

En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[\psi(\beta)-\psi(0)] = \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}\bigg|_{\beta=0} =$$

$$= \left\langle \varphi'(x), \frac{\partial(x+\beta(y-x))}{\partial\beta} \right\rangle\bigg|_{\beta=0} = \langle \varphi'(x), y-x\rangle.$$

Supposons maintenant que la condition (2.18) soit respectée. En introduisant les notations

$$\psi(\beta_1) = \varphi[x+\beta_1(y-x)]$$

et

$$\psi(\beta_2) = \varphi[x+\beta_2(y-x)],$$

on obtient

$$\psi'(\beta_1)(\beta_2-\beta_1) \leqslant \psi(\beta_2)-\psi(\beta_1),$$
$$\psi'(\beta_2)(\beta_1-\beta_2) \leqslant \psi(\beta_1)-\psi(\beta_2),$$

d'où

$$[\psi'(\beta_1)-\psi'(\beta_2)](\beta_2-\beta_1) \leqslant 0.$$

Ainsi, pour $\beta_2 > \beta_1$, on a

$$\psi'(\beta_2) \geqslant \psi'(\beta_1).$$

Soient $0 < \lambda < 1$ et $\beta_2 > \beta_1$; alors,

$$0 \leqslant \lambda(\beta_2-\beta_1)\int_0^1 [\psi'(\beta_1+\tau(\beta_2-\beta_1))-\psi'(\beta_1+\lambda\tau(\beta_2-\beta_1))]\,d\tau =$$

$$= (1-\lambda)\psi(\beta_1)+\lambda\psi(\beta_2)-\psi[(1-\lambda)\beta_1+\lambda\beta_2].$$

On obtient également un résultat analogue pour $\beta_2 < \beta_1$; il s'ensuit que pour β_1 et β_2, quels qu'ils soient, on a l'inégalité

$$\psi[(1-\lambda)\beta_1+\lambda\beta_2] \leqslant (1-\lambda)\psi(\beta_1)+\lambda\psi(\beta_2).$$

Ainsi, $\psi(\beta)$ est convexe, et par suite, $\varphi(x)$ l'est aussi :

$$\varphi[\beta y+(1-\beta)x] = \psi(\beta) = \psi[\beta\cdot 1+(1-\beta)\cdot 0] \leqslant \beta\psi(1)+(1-\beta)\psi(0) =$$
$$= \beta\varphi(y)+(1-\beta)\varphi(x).$$

2.10. Deux exemples de fonctions convexes

La méthode des pénalités (chapitre 6) fait appel aux deux propriétés suivantes des fonctions convexes.

a) Si $\varkappa(x)$ est convexe sur un ensemble convexe X, alors la fonction

$$\varphi(x) = \max\{\varkappa(x), 0\}$$

est également convexe sur X.

En effet, quels que soient $x, y \in X$,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) = \max\left\{\varkappa\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right), 0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{1}{2}\varkappa(x)+\frac{1}{2}\varkappa(y), 0\right\} \leqslant \frac{1}{2}\max\{\varkappa(x), 0\}+$$

$$+\frac{1}{2}\max\{\varkappa(y), 0\} = \frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(y).$$

b) Si $\varphi(x)$ est convexe et non négative sur un ensemble convexe X, la fonction $\varphi^2(x)$ est également convexe sur X.

En effet, $\varphi(x)$ étant convexe et non négative, on a

$$\varphi^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{4}[\varphi(x)+\varphi(y)]^2.$$

Mais

$$\frac{1}{4}[\varphi(x)+\varphi(y)]^2 \leqslant \frac{1}{2}\varphi^2(x)+\frac{1}{2}\varphi^2(y),$$

du fait que

$$\frac{1}{4}[\varphi(x)+\varphi(y)]^2-\frac{1}{2}\varphi^2(x)-\frac{1}{2}\varphi^2(y) = -\frac{1}{4}[\varphi(x)-\varphi(y)]^2 \leqslant 0.$$

Ainsi

$$\varphi^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi^2(x)+\frac{1}{2}\varphi^2(y).$$

2.11. Ensembles avec contraintes concaves

Dans les problèmes de programmation mathématique les ensembles admissibles, c'est-à-dire les ensembles sur lesquels on étudie les problèmes d'extrémum, sont ordinairement de la forme

$$X = \{x : f_i(x) \geqslant b_i \quad (i = \overline{1, m})\}$$

ou bien, dans le cas général,

$$X = \{x : f_i(x) \geqslant b_i (i = \overline{1, m_1}); \langle a_i, x\rangle = b_i \quad (i = \overline{m_1+1, m})\},$$

où $f_i(x)$ sont les fonctions concaves données, a_i les vecteurs donnés et b_i les nombres donnés.

Il est aisé de voir que l'ensemble X est convexe. En effet, soient $x, y \in X$; alors,

$$f_i(x) \geqslant b_i \quad \text{et} \quad f_i(y) \geqslant b_i,$$

et puisque f_i sont des fonctions concaves, on a pour tout $\alpha \in [0, 1]$

$$f_i[\alpha x+(1-\alpha) y] \geqslant \alpha f_i(x)+(1-\alpha) f_i(y) \geqslant \alpha b_i+(1-\alpha) b_i = b_i,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha x+(1-\alpha) y \in X.$$

2.12. Quelques propriétés extrémales des fonctions sur des ensembles convexes

Dans ce paragraphe nous examinerons les conditions d'existence des points extrémaux des fonctions dérivables sur des ensembles convexes.

Directions admissibles. La notion de direction admissible est très importante pour la programmation mathématique. C'est pourquoi plusieurs propriétés extrémales seront énoncées dans la terminologie des directions admissibles.

Définition. Une direction $s \neq 0$ au point x d'un ensemble convexe X est dite *admissible* s'il existe un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$ on ait

$$x+\lambda s \in X.$$

Par exemple, si $X = \{x : x \geqslant 0\}$, alors, en $x = 0$, tout vecteur $s \geqslant 0$, $s \neq 0$ donne une direction admissible. Et au point

$$x = \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 > 0 \\ \vdots \\ x_n > 0 \end{pmatrix}$$

une direction admissible est toute direction

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \geqslant 0 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},$$

où $s_2, s_3, \ldots, s_n$ sont des nombres arbitraires, $s \neq 0$.

Il est évident que si x est un point intérieur de X, toute direction s en ce point est admissible.

Théorème 2.12. *Pour qu'un point x^* d'un ensemble convexe X soit un point de minimum local d'une fonction $\varphi(x)$ dérivable sur X, il faut que pour tout $x \in X$ on ait l'inégalité*

$$\langle \varphi'(x^*), x-x^* \rangle \geqslant 0.$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif assez petit tel que pour tout point x du voisinage

$$U = \{x \in X : \| x-x^* \| \leqslant \varepsilon\}$$

on ait

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x^*).$$

Pour un point quelconque $x \neq x^*$ de l'ensemble X, on a

$$x^* + \lambda(x - x^*) \in U$$

quel que soit

$$\lambda \in (0, \lambda_0], \quad \lambda_0 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}\right\}.$$

Donc,

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda}[\varphi(x^* + \lambda s) - \varphi(x^*)] = \frac{\partial \varphi(x^*)}{\partial s} \|x - x^*\| = \langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0.$$

Remarque. Dans le langage des « directions admissibles », ce théorème peut être énoncé de la façon suivante.

Pour qu'un point x^* d'un ensemble convexe X soit le point d'un minimum local de la fonction $\varphi(x)$ dérivable sur X, il faut qu'en ce point les dérivées suivant toutes les directions admissibles soient non négatives.

Théorème 2.13. *Si une fonction $\varphi(x)$ et un ensemble X sont convexes, alors tout point $x^* \in X$, où la fonction $\varphi(x)$ a un minimum local, sera un point optimal du problème de minimisation de $\varphi(x)$ sur X. L'ensemble des points optimaux est un ensemble convexe.*

Démonstration. Supposons que x^* n'est pas un point optimal, c'est-à-dire qu'il existe $x' \in X$ tel que

$$\varphi(x') < \varphi(x^*).$$

Considérons les points de la forme

$$x = \alpha x' + (1 - \alpha) x^*, \ \alpha \in (0, 1].$$

X étant un ensemble convexe, $x \in X$. Ensuite, la convexité de $\varphi(x)$ et l'hypothèse sur x' entraînent

$$\varphi(x) = \varphi[\alpha x' + (1 - \alpha) x^*] \leqslant \alpha \varphi(x') + (1 - \alpha) \varphi(x^*) <$$
$$< \alpha \varphi(x^*) + (1 - \alpha) \varphi(x^*) = \varphi(x^*),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) < \varphi(x^*).$$

Mais ceci contredit la condition d'après laquelle x^* est le point d'un minimum local, puisque pour de petits α, le point x appartient à un voisinage assez petit du point x^*. Vérifions, enfin, si l'ensemble

$$G = \left\{x^* \in X : \varphi(x^*) = \mu = \min_{x \in X} \varphi(x)\right\}$$

est convexe. En effet, soient $x' \in G$ et $x'' \in G$. Etant donné que $G \subseteq X$ et que X est convexe, on a, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$$\lambda x' + (1 - \lambda) x'' \in X ;$$

$\varphi(x)$ étant convexe, on a

$$\varphi[\lambda x' + (1-\lambda) x''] \leqslant \lambda\varphi(x') + (1-\lambda)\varphi(x'') = \lambda\mu + (1-\lambda)\mu = \mu.$$

D'autre part, puisque μ est la valeur minimale de $\varphi(x)$ sur X, il vient

$$\varphi[\lambda x' + (1-\lambda) x''] \geqslant \mu,$$

d'où

$$\varphi[\lambda x' + (1-\lambda) x''] = \mu,$$

c'est-à-dire G est convexe.

Théorème 2.14. *Pour qu'un point x^* d'un ensemble convexe X soit le point d'un minimum, c'est-à-dire un point optimal, d'une fonction convexe $\varphi(x)$ dérivable sur X, il faut et il suffit que l'inégalité*

$$\langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0$$

soit vérifiée pour tout $x \in X$.

La condition est *nécessaire*. Cela résulte des deux théorèmes précédents.

La condition est *suffisante*. Supposons que, quel que soit $x \in X$, on ait

$$\langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0.$$

La convexité de $\varphi(x)$ entraîne

$$\varphi(x) - \varphi(x^*) \geqslant \langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0,$$

c'est-à-dire x^* est optimal.

Théorème 2.15. *Si $\varphi(x)$ est strictement convexe sur un ensemble convexe X et si $x^* \in X$ est un point optimal, c'est-à-dire si*

$$\mu = \varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x),$$

pour tout $x \in X$ et $x \neq x^*$, on a

$$\varphi(x) > \varphi(x^*),$$

et, donc, le point x^* est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x' \in X$ différent de x^* et tel que

$$\varphi(x') = \varphi(x^*) = \mu.$$

Alors, pour tout $\alpha \in (0, 1]$, le point $x = \alpha x' + (1-\alpha) x^*$ appartient à X ; la fonction $\varphi(x)$ étant strictement convexe, on a

$$\varphi(x) = \varphi[\alpha x' + (1-\alpha) x^*] < \alpha\varphi(x') + (1-\alpha)\varphi(x^*) = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu,$$

ce qui contredit l'optimalité du point x^*.

Examinons, enfin, encore un critère d'optimalité. Soit

$$v = x - \nu\varphi'(x),$$

où $\nu > 0$ est un nombre quelconque. Désignons par $p = p(v)$ la projection du point v sur X.

Théorème 2.16. *Pour qu'un point x^* d'un ensemble convexe X soit le point d'un minimum de la fonction convexe $\varphi(x)$ dérivable sur X, il faut et il suffit que*

$$x^* = p(v^*),$$

où

$$v^* = x^* - \nu\varphi'(x^*).$$

Démonstration. La condition est suffisante. Soit $x^* = p(v^*)$. Etant donné que $p(v^*)$ est la projection du point v^* sur X, pour tout $x \in X$ on déduit de (2.2) l'inégalité

$$\langle x - x^*, v^* - x^* \rangle \leqslant 0.$$

Et comme $v^* = x^* - \nu\varphi'(x^*)$ et $\nu > 0$, il s'ensuit que

$$\langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème 2.14, x^* est le point d'un minimum.

La condition est nécessaire. Soit x^* le point d'un minimum. Alors, pour tout $x \in X$, on a

$$\langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0$$

ou

$$-\nu \langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \leqslant 0.$$

Mais $-\nu\varphi'(x^*) = v^* - x^*$, donc

$$\langle v^* - x^*, x - x^* \rangle \leqslant 0,$$

c'est-à-dire, en vertu du théorème 2.2, x^* est la projection du point v^* sur X :

$$x^* = p(v^*).$$

Remarque. On voit aisément que si l'on supprime la contrainte de convexité imposée à $\varphi(x)$, on a la proposition suivante :

Pour qu'un point x^* d'un ensemble convexe X soit le point d'un minimum local de la fonction $\varphi(x)$ dérivable sur X, il faut que

$$x^* = p(v^*).$$

2.13. Fonctions fortement convexes

Nous avons déjà vu que si une fonction convexe $\varphi(x)$ admet un minimum local sur un ensemble convexe et fermé X, le point de ce minimum est un point optimal, et, de plus, pour une fonction strictement convexe, ce point est unique. Considérons maintenant une classe des fonctions dont chacune admet toujours un minimum sur tout ensemble fermé non vide ; si cet ensemble est convexe, le point du minimum est alors unique.

Définition. On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ définie sur un ensemble convexe X est *fortement convexe* s'il existe une constante $\varrho > 0$ telle que,

pour n'importe quels $x, y \in X$ et $\alpha \in [0, 1]$, on ait l'inégalité

$$\varphi[\alpha x+(1-\alpha) y] \leqslant \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\varrho \| x-y \|^2. \quad (2.20)$$

La grandeur ϱ s'appelle dans ce qui suit *paramètre de convexité forte.*

Voici un exemple de fonction fortement convexe. Considérons la fonction quadratique

$$\varphi(x) = \langle x, Bx\rangle+\langle p, x\rangle,$$

où B est une matrice strictement définie positive. La convexité forte se déduit de la relation

$$\varphi[\alpha x+(1-\alpha) y] = \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\langle x-y, B(x-y)\rangle,$$

du fait que

$$\langle x-y, B(x-y)\rangle \geqslant \lambda \| x-y \|^2,$$

où λ est la plus petite des valeurs propres de la matrice B.

Signalons quelques propriétés des fonctions fortement convexes.

P r o p r i é t é 1. *Si $\varphi(x) \in C^1(X)$ est fortement convexe sur un ensemble convexe X, quels que soient $x, y \in X$, on a l'inégalité*

$$\langle \varphi'(x)-\varphi'(y), x-y\rangle \geqslant \varrho \| x-y \|^2. \quad (2.21)$$

En effet, la fonction $\varphi(x)$ étant convexe, il vient

$$\varphi(x)-\varphi(y) \leqslant \langle \varphi'(x), x-y\rangle. \quad (2.18)$$

Ceci entraîne avec la définition de la convexité forte

$$\frac{1}{4}\varrho \| x-y \|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\varphi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi(y)-\varphi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\right] \leqslant \frac{1}{4}\langle \varphi'(x), x-y\rangle+$$

$$+\frac{1}{4}\langle \varphi'(y), y-x\rangle = \frac{1}{4}\langle \varphi'(x)-\varphi'(y), x-y\rangle.$$

P r o p r i é t é 2. *Si une fonction $\varphi(x)$ est fortement convexe sur un ensemble convexe fermé X, on a*

1) *Pour tout point $x^0 \in X$, l'ensemble*

$$X_0 = \{x \in X: \ \varphi(x) \leqslant \varphi(x^0)\}$$

est borné;

2) *il existe un point unique x^* tel que*

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x).$$

D é m o n s t r a t i o n. On raisonnera sous l'hypothèse que $\varphi(x) \in C^1(X)$. La propriété est vraie également sans cette hypothèse (cf. [2]), mais la démonstration sera alors bien plus longue.

Etant donné que

$$\varphi(x)-\varphi(y) = \int_0^1 \langle \varphi'(y+\alpha(x-y)),\ x-y\rangle\, d\alpha =$$

$$= \langle \varphi'(y), x-y\rangle + \int_0^1 \langle \varphi'(y+\alpha(x-y))-\varphi'(y),\ x-y\rangle\, d\alpha,$$

en appliquant l'inégalité (2.21), on obtient

$$\varphi(x)-\varphi(y) \geqslant \langle \varphi'(y), x-y\rangle + \frac{1}{2}\varrho\, \|x-y\|^2. \tag{2.22}$$

On en tire

$$0 \geqslant \varphi(x)-\varphi(x^0) \geqslant \langle \varphi'(x^0), x-x^0\rangle + \frac{1}{2}\varrho\, \|x-x^0\|^2,$$

c'est pourquoi

$$\|x-x^0\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\langle \varphi'(x^0), x^0-x\rangle \leqslant \frac{2}{\varrho}\|\varphi'(x^0)\|\, \|x-x^0\|,$$

d'où il résulte pour tout $x \in X_0$ que

$$\|x-x^0\| \leqslant \frac{2}{\varrho}\|\varphi'(x^0)\|, \tag{2.23}$$

c'est-à-dire que l'ensemble X_0 est borné.

L'existence de x^* est évidente par suite de la continuité de $\varphi(x)$ sur l'ensemble borné X_0 et de la définition de X_0 qui conduisent à

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X_0} \varphi(x) = \min_{x \in X} \varphi(x).$$

Quant à l'unicité de x^*, elle se déduit du fait qu'une fonction fortement convexe est en même temps une fonction strictement convexe, ainsi que du théorème 2.15.

Propriété 3. *Si $\varphi(x)$ est fortement convexe sur un ensemble X convexe et fermé, alors pour tout $x \in X$ on a l'inégalité*

$$\|x-x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}[\varphi(x)-\varphi(x^*)]. \tag{2.24}$$

Si de plus $\varphi(x) \in C^1(X)$, alors

$$\|x-x^*\| \leqslant \frac{1}{\varrho}\|\varphi'(x)\| \tag{2.25}$$

et

$$0 \leqslant \varphi(x)-\varphi(x^*) \leqslant \frac{1}{\varrho}\|\varphi'(x)\|^2. \tag{2.26}$$

Démonstration. Il résulte de (2.20) que

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^*\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x^*)-\frac{1}{4}\varrho\, \|x-x^*\|^2.$$

Et comme

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^*\right),$$

on obtient (2.24). Au point x^* du minimum de $\varphi(x)$ sur X, pour tout $x \in X$, on a l'inégalité (cf. le théorème 2.14)

$$\langle \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0,$$

c'est pourquoi (2.21) entraîne

$$\varrho \| x - x^* \|^2 \leqslant \langle \varphi'(x) - \varphi'(x^*), x - x^* \rangle \leqslant \langle \varphi'(x), x - x^* \rangle \leqslant \| \varphi'(x) \| \cdot \| x - x^* \|,$$

c'est-à-dire amène (2.25).

Enfin, on tire de (2.18) et (2.25)

$$0 \leqslant \varphi(x) - \varphi(x^*) \leqslant \langle \varphi'(x), x - x^* \rangle \leqslant \| \varphi'(x) \| \cdot \| x - x^* \| \leqslant \frac{1}{\varrho} \| \varphi'(x) \|^2.$$

Propriété 4. *Si une fonction $\varphi(x)$ fortement convexe appartient à la classe $C^{1,1}(X)$ sur un ensemble convexe fermé X, c'est-à-dire s'il existe une constante $L > 0$ telle que, quels que soient x, $y \in X$, on ait*

$$\| \varphi'(x) - \varphi'(y) \| \leqslant L \| x - y \|,$$

alors, quels que soient $x, y \in X$ tels que $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, on a l'inégalité

$$\| \varphi'(x) \| \leqslant \sqrt{2 + 12 \frac{L^2}{\varrho^2}} \| \varphi'(y) \|. \tag{2.27}$$

Démonstration. Si $\varphi'(y) = \mathbf{0}$, alors $\varphi'(x) = \mathbf{0}$ également, et donc (2.27) est respectée. Soit, maintenant, $\varphi'(y) \neq \mathbf{0}$. La relation

$$\langle \varphi'(x) - 2\varphi'(y), \varphi'(x) - 2\varphi'(y) \rangle \geqslant 0$$

implique l'inégalité

$$\| \varphi'(x) \|^2 - \| \varphi'(y) \|^2 \leqslant \| \varphi'(y) \|^2 + 2 \| \varphi'(x) - \varphi'(y) \|^2.$$

Supposons que la propriété 4 soit fausse, c'est-à-dire qu'il existe des $x, y \in X$ tels que

$$\| \varphi'(x) \|^2 > C^2 \| \varphi'(y) \|^2,$$

où

$$C \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2 + 12 \frac{L^2}{\varrho^2}}.$$

Alors,

$$(C^2 - 1) \| \varphi'(y) \|^2 < \| \varphi'(x) \|^2 - \| \varphi'(y) \|^2 \leqslant \| \varphi'(y) \|^2 + 2 \| \varphi'(x) - \varphi'(y) \|^2 = \| \varphi'(y) \|^2 + 2L^2 \| x - y \|^2.$$

Mais comme $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, on déduit de (2.24), (2.25) et (2.26)

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^2 \leqslant \|x-x^*\|^2+\|y-x^*\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varrho}[\varphi(x)-\varphi(x^*)]+\frac{1}{\varrho^2}\|\varphi'(y)\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}[\varphi(y)-\varphi(x^*)]+\frac{1}{\varrho^2}\|\varphi'(y)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varrho^2}\|\varphi'(y)\|^2+\frac{1}{\varrho^2}\|\varphi'(y)\|^2 = \frac{3}{\varrho^2}\|\varphi'(y)\|^2.$$

Donc,

$$(C^2-1)\|\varphi'(y)\|^2 < \left(1+12\frac{L^2}{\varrho^2}\right)\|\varphi'(y)\|^2.$$

Et puisque $\|\varphi'(y)\|^2 \neq 0$, on aboutit à l'inégalité

$$C^2 < 2+12\frac{L^2}{\varrho^2},$$

qui contredit la définition de la grandeur C.

CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LA PROGRAMMATION CONVEXE

On ne parvient à établir la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une solution des problèmes de la forme

$$\min_{x \in X} \varphi(x)$$

que pour certaines classes de fonctions économiques et d'ensembles admissibles X. Le présent chapitre a pour objet l'étude des problèmes dans lesquels les fonctions $\varphi(x)$ sont convexes, alors que les ensembles admissibles sont convexes, fermés et donnés par des systèmes d'égalités et d'inégalités.

3.1. Problème général de programmation convexe

Considérons l'ensemble

$$X = \{x \in \Gamma : f(x) \geqslant b\}, \tag{3.1}$$

où

$$f^T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

$f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ sont des fonctions scalaires concaves, continues sur Γ et Γ est un ensemble convexe fermé donné. En particulier, Γ peut coïncider avec l'espace E_n tout entier.

Au paragraphe 2.11 nous avons vu que si $\Gamma = E_n$, l'ensemble X est convexe. L'ensemble (3.1) est convexe du fait qu'il est l'intersection des ensembles convexes Γ et $\{x \in E_n : f(x) \geqslant b\}$. Les fonctions $f_i(x)$ étant continues et l'ensemble Γ fermé, on en déduit que l'ensemble X est fermé.

Le problème

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \tag{3.2}$$

où $\varphi(x)$ est convexe et où X vérifie les conditions ci-dessus, s'appelle *problème général de programmation convexe.*

3.2. Notation

Convenons que la notation

$$\min_{x \in X} \varphi(x)$$

signifie que le problème consiste

1) soit à chercher le point optimal $x^* \in X$:

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x) ;$$

2) soit, si un tel x^* n'existe pas, à chercher

$$\varphi^* = \inf_{x \in X} \varphi(x);$$

3) soit à établir que $\varphi(x)$ est non bornée inférieurement sur X ;

4) soit, enfin, à établir que $X = \varnothing$.

3.3. Condition de régularité

Pour nos raisonnements ultérieurs, il faudra introduire une condition supplémentaire que doit vérifier l'ensemble X.

S'il existe pour tout i ($i = \overline{1, m}$) un point $x_i \in X$ tel que

$$f_i(x_i) > b_i, \tag{3.3}$$

on dit que l'ensemble X satisfait à la *condition de régularité.*

A cette condition est équivalente celle qu'on appelle souvent *condition de régularité de Slater*: il existe un point $x \in X$ tel que

$$f(x) > b.$$

L'équivalence est démontrée sans peine si on choisit comme x

$$x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

et si on utilise le lemme 2.3.

Chaque fois que la condition de régularité sera nécessaire, nous en ferons une mention spéciale.

3.4. Lagrangien. Conditions d'optimalité

Considérons le vecteur de dimension m

$$h(x) = b - f(x). \tag{3.4}$$

Définition. La fonction

$$L(x, y) = \varphi(x) + \langle y, h(x) \rangle, \tag{3.5}$$

où $x \in \Gamma, y \geqslant 0$, se nomme *lagrangien associé au problème général de programmation convexe.*

Dans les problèmes d'extrémum lié de l'analyse classique un rôle important revient à la méthode des multiplicateurs de Lagrange : la solution du problème initial est cherchée parmi les points stationnaires de la fonction $L(x, y)$.

Dans les problèmes de programmation convexe (et en particulier de programmation linéaire) le lagrangien joue également un rôle important : sous certaines conditions, le problème de programmation convexe se ramène à la recherche d'un point selle du lagrangien.

Définition. On dit que le couple x^*, y^* est un *point selle* du lagrangien $L(x, y)$ sur l'ensemble $x \in \Gamma, y \geqslant 0$, si

$$x^* \in \Gamma, \ y^* \geqslant 0$$

et

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*) \tag{3.6}$$

quels que soient $x \in \Gamma, y \geqslant 0$. La formule (3.6) peut être également mise sous la forme

$$L(x^*, y^*) = \min_{x \in \Gamma} \max_{y \geqslant 0} L(x, y) = \max_{y \geqslant 0} \min_{x \in \Gamma} L(x, y). \tag{3.7}$$

Théorème 3.1. *Si le couple x^*, y^* est un point selle du lagrangien $L(x, y)$ sur l'ensemble $x \in \Gamma, y \geqslant 0$, alors c'est le point x^* qui est optimal dans le problème général de programmation convexe* (3.2).

Démonstration. On déduit de (3.5) et (3.6):

$$\varphi(x^*) + \langle y, h(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x^*) + \langle y^*, h(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, h(x)\rangle. \tag{3.8}$$

La première inégalité entraîne

$$\langle y, h(x^*)\rangle \leqslant \langle y^*, h(x^*)\rangle; \tag{3.9}$$

or, puisque $y^* \geqslant 0$ et cette inégalité est vraie quel que soit $y \geqslant 0$, il vient: $h(x^*) \leqslant 0$.

En particulier, (3.9) a lieu également pour $y = 0$, c'est-à-dire

$$\langle y^*, h(x^*)\rangle \geqslant 0,$$

et donc (puisque $y^* \geqslant 0$ et $h(x^*) \leqslant 0$),

$$\langle y^*, h(x^*)\rangle = 0. \tag{3.10}$$

Si $x \in X$, (3.1) et (3.4) entraînent que $h(x) \leqslant 0$; c'est pourquoi on a pour $x \in X$

$$\langle y^*, h(x)\rangle \leqslant 0. \tag{3.11}$$

(3.8) ayant lieu pour tout $x \in \Gamma$ et, en particulier pour $x \in X$, la seconde inégalité de (3.8) conduit avec (3.10) et (3.11) pour tout $x \in X$ aux inégalités

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, h(x)\rangle \leqslant \varphi(x).$$

Mais $x^* \in X$ du fait que $x^* \in \Gamma$ et $h(x^*) \leqslant 0$; par suite, x^* est un point optimal.

3.5. Théorème de Kuhn-Tucker

Dans la programmation mathématique, le rôle de ce théorème est fondamental.

Théorème 3.2 (de Kuhn-Tucker). *Supposons que dans le problème général* (3.2) *de programmation convexe*

$$\min_{x \in X} \varphi(x)$$

l'ensemble $X = \{x \in \Gamma : f(x) \geqslant b\}$ *possède la propriété de régularité* (3.3).

Pour que x^* *soit optimal, il faut et il suffit qu'il existe* $y^* \geqslant 0$ *tel que le couple* x^*, y^* *soit point selle du lagrangien* $L(x, y)$ *sur l'ensemble* $x \in \Gamma$, $y \geqslant 0$.

La condition est *suffisante*. Ceci a été démontré par le théorème 3.1.

La condition est *nécessaire*. Soit x^* optimal. Considérons dans l'espace E_{m+1} les ensembles

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} z_0 \leqslant \varphi(x^*) \\ z \leqslant 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad S = \bigcup_{x \in \Gamma} S(x),$$

où $S(x)$ est défini pour chaque $x \in \Gamma$ de la façon suivante

$$S(x) = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} z_0 \geqslant \varphi(x) \\ z \geqslant b - f(x) \end{matrix} \right\}.$$

Montrons que les ensembles P et S sont convexes. Pour P la convexité est évidente.

Soient

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z' \end{pmatrix} \in S \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z_0'' \\ z'' \end{pmatrix} \in S;$$

prouvons également que

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z_0' \\ z' \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} z_0'' \\ z'' \end{pmatrix} \in S$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Etant donné que $\begin{pmatrix} z_0' \\ z' \end{pmatrix} \in S$, il existe $x' \in \Gamma$ tel que

$$\begin{pmatrix} z_0' \\ z' \end{pmatrix} \in S(x'),$$

et, de façon analogue,

$$\begin{pmatrix} z_0'' \\ z'' \end{pmatrix} \in S(x'').$$

Il nous suffit de montrer que

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in S(x),$$

où $x = \alpha x' + (1-\alpha)\, x''$. La convexité de $\varphi(x)$ et de $-f(x)$ implique

$$\varphi(x) = \varphi[\alpha x' + (1-\alpha)\, x''] \leqslant \alpha\varphi(x') + (1-\alpha)\,\varphi(x'') \leqslant \alpha z_0' + (1-\alpha)\, z_0'' = z_0,$$

$$b - f(x) = b - f[\alpha x' + (1-\alpha)\, x''] \leqslant b - [\alpha f(x') + (1-\alpha) f(x'')] =$$

$$= \alpha[b - f(x')] + (1-\alpha)[b - f(x'')] \leqslant \alpha z' + (1-\alpha)\, z'' = z.$$

De la sorte,

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in S(x) \subset S.$$

Montrons maintenant que les ensembles P_0 et S n'ont pas de points communs. Ici

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} z_0 < \varphi(x^*) \\ z < 0 \end{matrix} \right\}.$$

L'optimalité de x^* fait que pour tout $x \in X$ on a

$$z_0 \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(x^*), \quad \text{mais dans } P_0 \quad z_0 < \varphi(x^*).$$

Pour chaque $x \in \Gamma$ tel que $x \notin X$, il existe au moins un indice i tel que

$$z_i \geqslant b_i - f_i(x) > 0, \quad \text{mais dans } P_0 \quad z_i < 0.$$

Ainsi, les ensembles S et P_0 sont convexes et ne possèdent pas de points communs. En vertu du théorème 2.5, il existe pour ces ensembles un hyperplan de séparation, c'est-à-dire un vecteur

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.12}$$

tel que

$$u_0 z_0 + \langle u, z \rangle \geqslant u_0 w_0 + \langle u, w \rangle \tag{3.13}$$

quels que soient

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in S \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} \in P_0.$$

L'ensemble P_0 possédant des points à composantes négatives aussi grandes en module que l'on veut, on doit avoir nécessairement

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.14}$$

L'inégalité (3.13) est vraie également si $\begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix}$ appartient à la frontière de P; aussi, en choisissant

$$z_0 = \varphi(x), \qquad z = b - f(x),$$

$$w_0 = \varphi(x^*), \quad w = 0,$$

on obtient pour tout $x \in \Gamma$

$$u_0\varphi(x) + \langle u, b - f(x)\rangle \geqslant u_0\varphi(x^*). \tag{3.15}$$

Montrons maintenant que $u_0 > 0$. Supposons que $u_0 = 0$. Alors (3.15) se met sous la forme

$$\langle u, b - f(x)\rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma.$$

Puisque $u \geqslant 0$ (cf. (3.14)) et $u \neq 0$ (cf. (3.12)), alors que pour tout $x \in X$ on a

$$b - f(x) \leqslant 0,$$

avec $u_i > 0$ l'égalité

$$b_i - f_i(x) = 0$$

est vérifiée pour tout $x \in X$, ce qui contredit la régularité de (3.3).

Donc, l'hypothèse $u_0 = 0$ entraîne que $u = 0$, ce qui contredit (3.12). Ainsi, $u_0 > 0$.

Soit

$$y^* = \frac{1}{u_0} u \geqslant 0,$$

alors (3.15) devient

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, b - f(x)\rangle$$

pour tout $x \in \Gamma$; pour $x = x^*$ on en tire

$$\langle y^*, b - f(x^*)\rangle \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Mais $y^* \geqslant 0$, et

$$b - f(x^*) \leqslant 0$$

du fait que $x^* \in X$; donc

$$\langle y^*, b - f(x^*)\rangle = 0. \tag{3.17}$$

Quel que soit $y \geqslant 0$, on a

$$\langle y, b - f(x^*)\rangle \leqslant 0. \tag{3.18}$$

(3.16), (3.17) et (3.18) entraînent

$$\varphi(x^*) + \langle y, b - f(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x^*) + \langle y^*, b - f(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, b - f(x)\rangle,$$

quels que soient $x \in \Gamma$, $y \geqslant 0$, ou

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*), \quad x \in \Gamma, \ y \geqslant 0.$$

R e m a r q u e. La condition de régularité (3.3) dans le théorème 3.2 peut être affaiblie, mais il est impossible d'éliminer complètement certaines conditions de régularité des contraintes non linéaires; on le voit ne serait-ce que de l'exemple bien simple suivant.

Supposons donnés dans E_1

$$\varphi(x) = -x, \quad f(x) = -x^2, \quad b = 0, \quad \Gamma = \{x : \ x \geqslant 0\}.$$

Le problème de programmation convexe se ramène donc à la forme

$$\min(-x)$$

sous les conditions

$$-x^2 \geqslant 0,\ x \geqslant 0.$$

Pour l'ensemble X constitué ici du seul point $x = 0$ les conditions de Slater ne sont pas vérifiées. Il est clair que $x^* = 0$ et $\varphi(x^*) = 0$, mais pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ le lagrangien

$$L(x, y) = -x + yx^2$$

ne possède pas en général de point selle.

Remarque. Si l'ensemble X n'est défini que par des inégalités linéaires, le théorème 3.2 est vrai sans aucune restriction supplémentaire imposée à X. Le théorème correspondant sera démontré dans ce qui suit.

3.6. Cas de dérivabilité

Les inégalités qui déterminent les conditions d'existence d'un point selle sont d'un grand intérêt pour l'utilisation pratique. Ci-dessus ces inégalités sont écrites pour le problème général de programmation convexe lorsque l'ensemble admissible est de la forme

$$X = \{x : \boldsymbol{f}(x) \geqslant \boldsymbol{b},\ x \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

c'est-à-dire si $\Gamma = \{x : x \geqslant \boldsymbol{0}\}$.

Théorème 3.3. *Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\boldsymbol{f}(x)$ du problème général de programmation convexe* (3.2) *sont continûment dérivables sur l'ensemble $\Gamma = \{x : x \geqslant \boldsymbol{0}\}$, pour que le couple x^*, y^* soit point selle du lagrangien dans le domaine $x \geqslant \boldsymbol{0}$, $y \geqslant \boldsymbol{0}$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{3.19}$$

$$\left\langle x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x} \right\rangle = 0, \tag{3.20}$$

$$x^* \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} \leqslant \boldsymbol{0}, \tag{3.22}$$

$$\left\langle y^*, \frac{\partial L^*}{\partial y} \right\rangle = 0, \tag{3.23}$$

$$y^* \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{3.24}$$

où

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x^* \\ y = y^*}},\ \frac{\partial L^*}{\partial y} = \frac{\partial L(x,y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x = x^* \\ y = y^*}}.$$

Démonstration. Ecrivons les conditions (3.19)-(3.24) sous la forme équivalente suivante:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{3.19'}$$

$$x_i^* \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{3.20'}$$

$$x_i^* \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{3.21'}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} \leqslant 0 \quad (j = \overline{1, m}), \tag{3.22'}$$

$$y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \tag{3.23'}$$

$$y_j^* \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, m}). \tag{3.24'}$$

La condition est nécessaire. Supposons qu'il existe $x^* \geqslant \mathbf{0}$, $y^* \geqslant \mathbf{0}$ tels que

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$$
$$x \geqslant \mathbf{0}, \quad y \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Il s'ensuit en particulier que

$$L(x_i, y^*) \overset{\text{def}}{=} L(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*, y^*) \geqslant L(x^*, y^*)$$

pour $x_i \geqslant 0$, c'est-à-dire que la fonction d'une variable $L(x_i, y^*)$ admet au point x_i^* un minimum pour $x_i \geqslant 0$ (en particulier, un minimum local). Or, (3.19')-(3.21') sont précisément les conditions nécessaires d'un minimum local pour $x_i \geqslant 0$ admis par la fonction d'une variable (puisque soit x_i^* est un point intérieur du demi-axe $x_i \geqslant 0$ et alors $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0$, soit $x_i^* = 0$, et alors $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \geqslant 0$). Comme $L(x^*, y)$ est linéaire (par rapport à y), la nécessité de (3.22)-(3.24) est évidente.

La condition est suffisante. Supposons observées (3.19')-(3.24'). Puisque $\varphi(x)$ et $\boldsymbol{h}(x)$ (cf. (3.4)) sont convexes, alors pour $x \geqslant \mathbf{0}$, $L(x, y^*)$ est convexe par rapport à x et, par conséquent, on a bien l'inégalité (cf. (2.18))

$$L(x, y^*) \geqslant L(x^*, y^*) + \left\langle x - x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x} \right\rangle.$$

Il en résulte avec (3.19)-(3.21) que

$$L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*), \quad x \geqslant \mathbf{0}.$$

La première inégalité de (3.6) résulte immédiatement de la linéarité de $L(x^*, y)$ par rapport à y et de (3.22)-(3.24).

Remarque 1. Si l'on impose à l'ensemble X de vérifier les conditions de régularité, (3.19)-(3.24) seront alors les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un point optimal x^*.

Remarque 2. Si dans le problème (3.1) $\Gamma = E_n$, des raisonnements analogues montrent sans peine que le point selle est défini par la condition $\frac{\partial L^*}{\partial x} = \mathbf{0}$ et les relations (3.22)-(3.24).

Les conditions (3.19)-(3.24) peuvent s'écrire sous une autre forme, plus géométrique que les précédentes.

Toujours dans les mêmes notations

$$\operatorname{grad} \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x), \quad \operatorname{grad} f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_i'(x).$$

Dans ce qui suit appelons les vecteurs $-\varphi'(x)$ et $-f_i'(x)$ *antigradients* des fonctions $\varphi(x)$ et $f_i(x)$.

Notons que le vecteur $-e_i$ est la normale extérieure par rapport à X à l'hyperplan frontière $x_i = 0$, alors que le vecteur $-f_i'(x)$ est la normale extérieure en x à la surface frontière $f_i(x) = b_i$.

Considérons le point $x \in X$. Si ce point appartient à la frontière de X, certaines inégalités parmi celles qui définissent X deviennent égalités.

Soient

$$I(x) = \{i:\ f_i(x) = b_i\}, \tag{3.25}$$

$$J(x) = \{j:\ x_j = 0\}. \tag{3.26}$$

Théorème 3.4. *Si l'ensemble X du problème général de programmation convexe jouit de la propriété de régularité* (3.3), *et les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont continûment dérivables sur l'ensemble $\Gamma = \{x : x \geqslant \mathbf{0}\}$, alors, pour que $x^* \in X$ soit optimal, il faut et il suffit que l'antigradient de la fonction économique puisse être représenté sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients non négatifs des normales extérieures aux contraintes en x^*:*

$$-\varphi'(x^*) = -\sum_{i \in I(x^*)} y_i f_i'(x^*) - \sum_{j \in J(x^*)} v_j e_j. \tag{3.27}$$

Démonstration. Prouvons que les conditions (3.19)-(3.22) peuvent se mettre sous la forme (3.27), ce qui démontrera précisément notre théorème.

D'après (3.21) et (3.22), $x^* \in X$. Introduisons les notations

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j;$$

(3.19) devient alors

$$\varphi'(x^*) - \sum_{i=1}^{m} y_i f_i'(x^*) = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j, \quad v_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

La condition (3.24) implique $y_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$, et les conditions (3.20′) et (3.23′) s'écrivent alors

$$v_j x_j^* = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i(b_i - f_i(x^*)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Comme $x^* \in X$, en vertu de (3.25) et (3.26), on obtient finalement (3.27).

D'après la remarque 1, on déduit que les conditions (3.27) sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un x^* optimal.

Remarque 3. Si dans le problème (3.1) $\Gamma = E_n$, en s'appuyant sur la remarque 2 on voit sans peine que la relation (3.27) devient

$$-\varphi'(x^*) = -\sum_{i \in I(x^*)} y_i f_i'(x^*), \quad y_i \geqslant 0, \quad i \in I(x^*).$$

3.7. Problème avec contraintes linéaires

Considérons enfin le cas où l'ensemble X n'est défini que par des inégalités linéaires, et montrons que le théorème de Kuhn-Tucker est vrai sans conditions de régularité.

Supposons que l'ensemble admissible est de la forme

$$R_1 = \{x: \ Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0\}. \tag{3.28}$$

Examinons le problème suivant de programmation convexe

$$\min_{x \in R_1} \varphi(x) \tag{3.29}$$

(la fonction $\varphi(x)$ est convexe).

D'une façon analogue à (3.25) et (3.26), posons pour le point x

$$I(x) = \{i: \ (Ax)_i = b_i\}, \tag{3.30}$$

$$J(x) = \{j: \ x_j = 0\}. \tag{3.26}$$

Rappelons que le vecteur $s \neq 0$ est une *direction admissible* en $x \in R_1$ s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$ le point $x + \lambda s$ appartient à R_1.

On voit aisément que les inégalités suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la direction s soit admissible en x:

$$(As)_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in I(x), \tag{3.31}$$

$$s_j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j \in J(x). \tag{3.32}$$

Maintenant nous pouvons formuler et démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.5. *Pour qu'une fonction convexe continûment dérivable $\varphi(x)$ possède dans R_1 un point optimal x^*, c'est-à-dire pour que*

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in R_1} \varphi(x),$$

il faut et il suffit qu'il existe un $y^* \geqslant 0$ tel que le couple x^*, y^* soit point selle du lagrangien $L(x, y)$ dans le domaine $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Démonstration. La condition est suffisante en vertu du théorème 3.1.

La condition est nécessaire. Supposons que x^* soit un point optimal. Puisque la fonction $\varphi(x)$ est convexe, le théorème 2.12 (cf. remarque

du théorème) entraîne que

$$\|s\| \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial s}\Big|_{x=x^*} = \langle \varphi'(x^*), s\rangle \geqslant 0 \tag{3.33}$$

pour tout s tel que

$$(As)_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in I(x^*), \tag{3.31}$$

$$s_j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j \in J(x^*). \tag{3.32}$$

Supposons pour simplifier que

$$I(x^*) = \{1, 2, \ldots, k \leqslant m\} \quad \text{et} \quad J(x^*) = \{1, 2, \ldots, l \leqslant n\}$$

(ce qui ne restreint pas la généralité). Utilisons ensuite le théorème de Farkas. Pour appliquer l'écriture du théorème de Farkas, introduisons la matrice

$$B^T = [a_1, a_2, \ldots, a_k, e_1, e_2, \ldots, e_l],$$

où a_i est la i-ième colonne de la matrice A^T, et e_j le j-ième vecteur de base. Maintenant les conditions (3.31) et (3.32) peuvent s'écrire

$$Bs \geqslant 0. \tag{3.34}$$

La matrice B et les vecteurs $\varphi'(x^*)$ et s vérifient les conditions du théorème de Farkas ; il existe donc un vecteur

$$u^T = (y_1, y_2, \ldots, y_k, v_1, v_2, \ldots, v_l) \geqslant 0,$$

tel que

$$\varphi'(x^*) = B^T u,$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} y_i a_i + \sum_{j \in J(x^*)} v_j e_j. \tag{3.35}$$

Le théorème 3.4 prouve qu'une telle représentation est équivalente aux inégalités de Kuhn-Tucker (3.19)-(3.24) et, par conséquent, d'après le théorème 3.3, il existe un y^* tel que le couple x^*, y^* soit point selle de la fonction $L(x, y)$ dans le domaine $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Remarque. A la différence des théorèmes 3.2 et 3.4, ce théorème n'impose pas à l'ensemble R_1 des contraintes de régularité.

Pour démontrer que l'optimalité de x^* entraîne que le couple x^*, y^* est point selle du lagrangien $L(x, y)$, le théorème de Kuhn-Tucker recourait à la condition de régularité de Slater. Par contre, ici, l'optimalité de x^* conduit immédiatement à la relation (3.35) et, donc (d'après le théorème 3.4), aux inégalités (3.19)-(3.24) ; or, d'après le théorème 3.3, ces inégalités déterminent le point selle du lagrangien $L(x, y)$.

CHAPITRE 4

PROGRAMMATION LINÉAIRE

4.1. Problème général

Le problème d'extrémum suivant sera appelé *problème général de programmation linéaire*

$$\min_{x \in R_1} \langle c, x \rangle,$$

$$R_1 = \{x : Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}. \tag{4.1}$$

Dans ce qui suit nous montrerons que tout problème de programmation linéaire peut être ramené à la forme (4.1). C'est pourquoi les théorèmes principaux seront examinés à la lumière du problème (4.1), ce qui ne limite d'aucune façon la généralité.

4.2. Dualité

On dira que le problème

$$\max_{y \in Q_1} \langle b, y \rangle,$$

$$Q_1 = \{y :\ A^T y \leqslant c, \quad y \geqslant 0\} \tag{4.2}$$

est *dual* par rapport au problème général de programmation linéaire.

Deux problèmes d'extrémum sont dits *équivalents* si les ensembles de leurs solutions coïncident, ou si les deux problèmes ne possèdent aucune solution.

Il est aisé de voir que le problème (4.1) est dual par rapport à (4.2). A cet effet il suffit d'examiner le problème équivalent à (4.2)

$$\min_{y \in Q_1} \langle -b, y \rangle,$$

$$Q_1 = \{y :\ -A^T y \geqslant -c,\ y \geqslant 0\}$$

et construire conformément à la définition son dual

$$\max_{x \in R_1} \langle -c, x \rangle,$$

$$R_1 = \{x :\ -Ax \leqslant -b,\ x \geqslant 0\},$$

qui constitue précisément le problème (4.1).

Ainsi, les problèmes (4.1) et (4.2) sont duals l'un par rapport à l'autre.

4.3. Terminologie

Dans notre ouvrage nous emploierons toujours la terminologie déjà adoptée (fonction économique, ensemble admissible, point admissible, point optimal, etc.).

Toutefois, il faut dire que la terminologie de la programmation linéaire n'est pas encore bien définie. Dans une grande mesure il en est ainsi du fait des applications économiques dont la terminologie est souvent utilisée dans les problèmes de programmation linéaire proprement dite.

La matrice $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ est dite *matrice des conditions du problème* (4.1).

Ses colonnes a_i $(i = \overline{1, n})$ s'appellent *vecteurs des conditions de* (4.1).

Le vecteur b est dit *vecteur des contraintes de* (4.1).

4.4. Interprétation géométrique

Dans E_n l'ensemble R_1 peut être envisagé comme l'intersection des demi-espaces (pour $n = 2$, des demi-plans)

$$(Ax)_i \geqslant b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Considérons la famille

$$(c, x) = \lambda$$

qui est une famille d'hyperplans parallèles (pour $n = 2$, de droites parallèles). Le vecteur $-c$ est orienté dans le sens de décroissance de la fonction économique. La figure 4.1 représente le cas d'un ensemble R_1 borné formant un polygone.

Considérons un point $x_0 \in R_1$. La valeur de la fonction économique en ce point est

$$\lambda_0 = \langle c, x_0 \rangle.$$

Déplaçons maintenant la droite

$$\langle c, x \rangle = \lambda_0$$

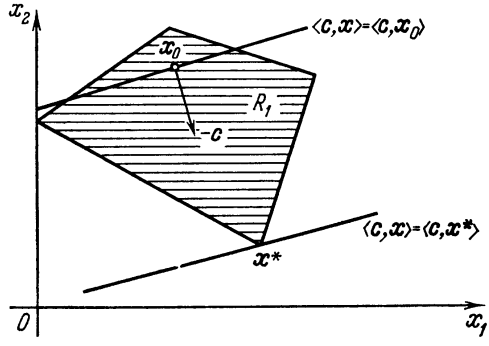

Fig. 4.1

dans le sens de $-c$, c'est-à-dire dans le sens où la grandeur λ décroît tant que nous ne tombons en $x^* \in R_1$ dont la valeur de λ est minimale. Le sens géométrique du problème (4.1) est évident.

Il est aisé de représenter sur le dessin le cas où R_1 est non borné alors que la solution existe, celui où la solution existe mais n'est pas unique et, enfin, le cas où R_1 est non borné et la fonction $\langle c, x\rangle$ est non bornée sur R_1.

4.5. Théorèmes fondamentaux

Formulons en premier lieu un théorème qui, étant un cas particulier du théorème 3.5 (avec $\varphi(x)$ linéaire), n'impose pas de démonstration spéciale.

Introduisons la notation suivante pour le lagrangien du problème (4.1) :

$$L_1(x, y) = \langle c, x\rangle + \langle y, b - Ax\rangle. \tag{4.3}$$

Théorème 4.1. *Pour que le problème général de programmation linéaire admette en $x^* \in R_1$ un optimum, il faut et il suffit qu'il existe $y^* \geqslant 0$ tel que le couple x^*, y^* soit point selle du lagrangien $L_1(x, y)$ dans le domaine $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, c'est-à-dire*

$$L_1(x^*, y) \leqslant L_1(x^*, y^*) \leqslant L_1(x, y^*). \tag{4.4}$$

Remarque 1. La relation (3.35) implique que la condition nécessaire et suffisante pour l'optimalité de x^* dans le problème (4.1) est que le vecteur c soit représenté de la façon suivante :

$$-c = -\sum_{i \in I(x^*)} y_i^* a_i - \sum_{j \in J(x^*)} v_j^* e_j, \quad y_i^* \geqslant 0, \quad v_j^* \geqslant 0, \tag{4.5}$$

où

$$I(x^*) = \{i : (Ax^*)_i = b_i\}, \quad J(x^*) = \{j : x_j^* = 0\}$$

et

$$A^T = [a_1, a_2, \ldots, a_m].$$

Remarque 2. Les théorèmes 3.3 et 4.1 entraînent que pour x^* et y^*, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_i^*(c - A^T y^*)_i &= 0 \quad (i = \overline{1, n}), \\ y_j^*(b - Ax^*)_j &= 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Théorème 4.2 (de dualité). *Les problèmes primal et dual ou bien possèdent tous les deux des points optimaux x^* et y^*, et de plus*

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle, \tag{4.7}$$

ou bien n'en possèdent pas tous les deux.

Démonstration. Considérons le lagrangien du problème (4.2).

A cet effet mettons ce problème sous la forme de (4.1), c'est-à-dire sous la forme d'un problème général de programmation linéaire.

Il est clair que (4.2)

$$\max_{y \in Q_1} \langle b, y \rangle,$$

$$Q_1 = \{y : A^T y \leqslant c, y \geqslant 0\}$$

est équivalent au problème

$$\min_{y \in Q_1} \langle -b, y \rangle,$$

$$Q_1 = \{y : -A^T y \geqslant -c, y \geqslant 0\}.$$

Or, ce dernier étant de la forme générale, son lagrangien s'écrit

$$L_2(y, x) = -\langle b, y \rangle + \langle x, -c + A^T y \rangle. \tag{4.8}$$

Le point selle de $L_2(y, x)$ dans le domaine $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ est le couple y', x' tel que

$$L_2(y', x) \leqslant L_2(y', x') \leqslant L_2(y, x'). \tag{4.9}$$

La comparaison de (4.8) et (4.3) donne

$$L_2(y, x) = -[\langle c, x \rangle + \langle y, b - Ax \rangle] = -L_1(x, y). \tag{4.10}$$

Il résulte de (4.10), (4.9) et (4.4) que si x^*, y^* est un point selle de $L_1(x, y)$, alors y^*, x^* est un point selle de $L_2(y, x)$, et donc soit x^* et y^* sont respectivement optimaux pour les problèmes (4.1) et (4.2), soit, s'il n'existe pas de point selle, les problèmes (4.1) et (4.2) ne possèdent pas tous les deux de solution.

Enfin, l'égalité (4.7) se déduit des formules (4.6).

Théorème 4.3. *Quels que soient $x \in R_1$ et $y \in Q_1$ admissibles, on a l'inégalité*

$$\langle c, x \rangle \geqslant \langle b, y \rangle. \tag{4.11}$$

Démonstration. Il résulte des inégalités qui définissent R_1 et Q_1 que

$$\langle c, x \rangle \geqslant \langle A^T y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \geqslant \langle y, b \rangle = \langle b, y \rangle.$$

Théorème 4.4. *Si $x^* \in R_1$, $y^* \in Q_1$, et*

$$\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle,$$

x^* et y^* sont optimaux respectivement pour les problèmes (4.1) *et* (4.2), *et inversement.*

Démonstration. Quel que soit $x \in R_1$, on a en vertu de (4.11) et de la condition du théorème

$$\langle c, x \rangle \geqslant \langle b, y^* \rangle = \langle c, x^* \rangle,$$

c'est-à-dire x^* est optimal. L'optimalité de y^* se démontre d'une façon analogue. La réciproque est donnée par le théorème de dualité 4.2.

Théorème 4.5. *Si une fonction linéaire* $\langle c, x\rangle$, $c \neq 0$ *est bornée inférieurement sur l'ensemble non vide* R_1, *il existe un point* $x^* \in R_1$ *tel que*

$$\langle c, x^*\rangle = \min_{x \in R_1} \langle c, x\rangle.$$

Démonstration. Premièrement, mettons les inégalités qui définissent R_1 sous la forme

$$R_1 = \{x : Mx \geqslant d\}.$$

Ici $M = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$, où E est la matrice unité, et $d^T = (b^T, 0, 0, \ldots, 0)$.

Notons $L_i = \{x : (Mx - d)_i = 0\}$. Alors

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{m+n} L_i\right) \cap R_1$$

est la frontière de R_1 ; de plus, $\Gamma \neq \varnothing$, puisque R_1 est l'intersection de l'ensemble convexe fermé $\{x : x \geqslant 0\}$, possédant manifestement des points frontières, avec l'ensemble convexe fermé $\{x : Ax \geqslant b\}$.

Sans limiter la généralité, on peut admettre que

$$L_i \cap R_1 \neq \varnothing$$

rien que pour $i = \overline{1, s}$, $s \leqslant m+n$; donc

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right) \cap R_1.$$

Menons la démonstration par récurrence sur le nombre n, dimension de l'espace E_n. Pour E_1 (cas unidimensionnel), l'ensemble admissible R_1 peut être soit un point, soit un segment, soit une demi-droite pour lesquels le théorème est évident.

En supposant que le théorème soit vrai pour $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$, démontrons-le pour E_k.

Etant donné que $L_i \cap R_1 \subset E_{k-1}$ ($i = \overline{1, s}$), d'après l'hypothèse de récurrence, quel que soit $i = \overline{1, s}$, il existe un $x_i \in L_i \cap R_1$ tel que

$$\langle c, x_i\rangle = \min_{x \in L_i \cap R_1} \langle c, x\rangle.$$

D'après la définition de Γ, il existe un $x^* \in \Gamma$ tel que

$$\langle c, x^*\rangle = \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \langle c, x_i\rangle = \min_{x \in \left(\bigcup_{i=1}^{s} L_i\right) \cap R_1} \langle c, x\rangle \min_{x \in \Gamma} \langle c, x\rangle.$$

Il reste à montrer que

$$\langle c, x^*\rangle = \min_{x \in \Gamma} \langle c, x\rangle = \min_{x \in R_1} \langle c, x\rangle.$$

A cet effet il suffit de voir que pour un point quelconque $x \in R_1 \setminus \Gamma$ il existe un point frontière $x' \in \Gamma$ tel que

$$\langle c, x' \rangle \leqslant \langle c, x \rangle.$$

Considérons le point $\bar{x} = x - \lambda c$, $\lambda > 0$. Puisque x est un point intérieur de R_1, on a $\bar{x} = x - \lambda c \in R_1$ au moins pour de petits λ. Par hypothèse, $\langle c, \bar{x} \rangle$ est bornée inférieurement

$$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle c, x \rangle - \lambda \| c \|^2 \geqslant \mu.$$

Par conséquent,

$$0 < \lambda \leqslant \frac{\langle c, x \rangle - \mu}{\| c \|^2} < \infty.$$

Il existe donc

$$\min_{\lambda} [\langle c, x \rangle - \lambda \| c \|^2] = \langle c, x \rangle - \lambda' \| c \|^2, \tag{4.12}$$

où l'on minimise par rapport à tous les λ tels que

$$\lambda \in \left\{ \lambda : \ 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\langle c, x \rangle - \mu}{\| c \|^2} \right\} \cap \{ \lambda : \ x - \lambda c \in R_1 \}.$$

Il est clair que $x' = x - \lambda' c \in \Gamma$. En effet, si x' est un point intérieur de R_1, il existe un $\lambda'' > \lambda' > 0$ tel que $x - \lambda'' c \in R_1$. Mais alors

$$\langle c, x \rangle - \lambda'' \| c \|^2 < \langle c, x \rangle - \lambda' \| c \|^2.$$

Or, ceci contredit à (4.12). Ainsi

$$x' \in \Gamma \quad \text{et} \quad \langle c, x' \rangle < \langle c, x \rangle.$$

Le théorème est démontré.

Remarque. Il convient du prêter attention au fait que ce théorème n'est vrai en général que pour les problèmes de programmation linéaire.

Considérons, par exemple, le problème suivant : minimiser x_2 sur l'ensemble

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \ x_1 \cdot x_2 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \right\}.$$

Il est évident que X est convexe et fermé,

$$\inf_{x \in X} x_2 = 0,$$

mais il n'existe pas de point de X où l'on atteindrait $\inf_X x_2$ (fig. 4.2).

Théorème 4.6. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de l'un des problèmes duals (et donc des deux problèmes) est que*

$$R_1 \neq \varnothing \quad \textit{et} \quad Q_1 \neq \varnothing.$$

Démonstration. La *nécessité* est évidente.

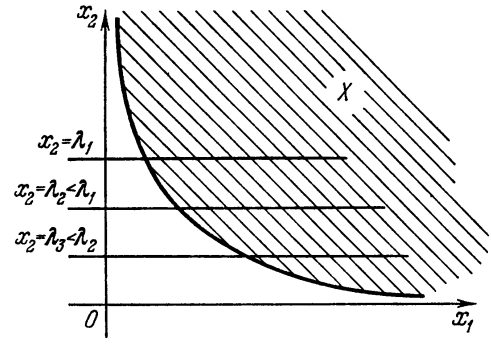

Fig. 4.2

La condition est *suffisante*. Soit $y \in Q_1$, alors quel que soit $x \in R_1$, on a (4.11) :

$$\langle c, x\rangle \geqslant \langle b, y\rangle;$$

et alors, d'après le théorème 4.5, le problème (4.1) possède une solution et, donc, en vertu du théorème 4.2, le problème (4.2) en possède aussi une.

Corollaire a*). *Si* $\langle c, x\rangle (\langle b, y\rangle)$ *est non bornée inférieurement sur* R_1 (*supérieurement sur* Q_1), *il vient*

$$Q_1 = \varnothing \quad (R_1 \neq \varnothing).$$

Corollaire b. *Si* $Q_1 = \varnothing$ $(R_1 = \varnothing)$ *et* $R_1 \neq \varnothing$ $(Q_1 \neq \varnothing)$, *alors* $R_1 (Q_1)$ *est non borné et* $\langle c, x\rangle$ *est non bornée inférieurement sur* R_1 ($\langle b, y\rangle$ *est non bornée supérieurement sur* Q_1).

Théorème 4.7. *Si*

$$\langle c, x^*\rangle = \min_{R_1} \langle c, x\rangle$$

et s'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_M$ *tels que*

a) $$x_i \in R_1 \quad (i = \overline{1, M}),$$

b) $$x^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i x_i,$$

où $$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \ \alpha_i > 0 \ (i = \overline{1, M}),$$

il vient

$$\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_1\rangle = \ldots = \langle c, x_M\rangle.$$

Démonstration. Supposons que

$$\langle c, x^*\rangle \leqslant \langle c, x_1\rangle \leqslant \ldots \leqslant \langle c, x_M\rangle. \tag{4.13}$$

*) La proposition duale est donnée entre parenthèses.

Alors,

$$\langle c, x^*\rangle = \left\langle c, \sum_{i=1}^{M} \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle c, x_i\rangle \geqslant \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle c, x_1\rangle = \langle c, x_1\rangle.$$

En tenant compte de (4.13), on obtient

$$\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_1\rangle.$$

Raisonnons par récurrence :

$$\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_1\rangle = \ldots = \langle c, x_k\rangle \quad (k < M)$$

et prouvons que

$$\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_{k+1}\rangle.$$

En effet,

$$\langle c, x^*\rangle = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle c, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle c, x_i\rangle + \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i \langle c, x_i\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \langle c, x^*\rangle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \langle c, x_{k+1}\rangle \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i.$$

D'où

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \langle c, x^*\rangle \geqslant \left(\sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i\right) \langle c, x_{k+1}\rangle = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \langle c, x_{k+1}\rangle.$$

Etant donné que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$ (du fait que $k < M$), on a

$$\langle c, x^*\rangle \geqslant \langle c, x_{k+1}\rangle.$$

Et alors (cf. (4.13))

$$\langle c, x^*\rangle = \langle c, x_{k+1}\rangle.$$

Théorème 4.8. *Si le problème* (4.1) *possède une solution* x^*, *il existe un point anguleux* $\bar{x}$ *tel que*

$$\langle c, \bar{x}\rangle = \min_{x \in R_1} \langle c, x\rangle.$$

Démonstration. 1) Si R_1 est borné, le théorème 2.6 implique qu'il existe des points anguleux $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de l'ensemble R_1 tels que pour tout $x \in R_1$ et, en particulier, pour x^*, on ait

$$x^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, N}).$$

Biffons du système des points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ceux auxquels correspondent $\alpha_i = 0$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que ce sont les points

$x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_N$. On a donc

$$x^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0 \quad (i = \overline{1, M}),$$

c'est-à-dire on observe les conditions du théorème 4.7, d'où l'on déduit notre théorème.

2) Soient R_1 non borné et x^* optimal. Il est évident que pour un nombre $\mu > 0$ suffisamment grand l'ensemble

$$L = \left\{x : \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \mu\right\}$$

est tel que

$$x^* \in R_1 \cap L \quad \text{et} \quad x^* \notin l = \left\{x : \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu\right\}.$$

L'intersection de l'« orthant » $x \geqslant 0$ avec l'ensemble L étant bornée, $R_1 \cap L$ est borné, et, par conséquent (théorème 2.6), il existe des points anguleux x_1, $x_2, \ldots, x_M$ de l'ensemble $R_1 \cap L$ tels que

$$\langle c, x^* \rangle = \langle c, x_1 \rangle = \ldots = \langle c, x_M \rangle.$$

Si au moins un point $x_i \notin l$, le théorème est alors démontré du fait que dans ce cas x_i est un point anguleux de l'ensemble R_1. Si tout $x_i \in l$ $(i = \overline{1, M})$, la représentation

$$x^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0 \quad (i = \overline{1, M})$$

conduit à $x^* \in l$, ce qui contredit le choix du nombre $\mu > 0$ effectué lors de la construction de l'ensemble L.

4.6. Caractéristique algébrique d'un point anguleux

Nous avons introduit précédemment la définition d'un point anguleux. Or, pour calculer un point anguleux, il faut connaître sa caractéristique algébrique.

Soit, comme toujours,

$$I(x) = \{i : (Ax)_i = b_i\}, \; J(x) = \{j : x_j = 0\},$$
$$J = \{j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Le système d'équations

$$\begin{aligned} (Az)_i &= b_i, \quad i \in I(x), \\ z_j &= 0, \quad j \in J(x) \end{aligned} \tag{4.14}$$

est à matrice carrée si

$$I(x) \cup J(x) = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Sans limiter la généralité, on peut admettre

$$I(x) = \{i : i = 1, 2, \ldots, r\},$$
$$J(x) = \{j : j = k+1, k+2, \ldots, n\},$$

et alors, pour $r = k$, le système d'équations sera à matrice carrée.

Théorème 4.9. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $x \neq 0$ *soit un point anguleux de l'ensemble* R_1 *est que* x *satisfasse à un système d'équations carré non singulier* (4.14).

La condition est *suffisante*. Soit $x \in R_1$ et supposons qu'il existe une matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kk} \end{pmatrix}, \quad \det B \neq 0, \tag{4.15}$$

telle que

$$B\bar{x} = \bar{b}. \tag{4.16}$$

Ici

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix}, x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0,$$

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Supposons que x ne soit pas un point anguleux, c'est-à-dire qu'il existe $x' \in R_1$, $x'' \in R_1$ et $x' \neq x'' \neq x$ tels que

$$x = \alpha x' + (1-\alpha)\, x'', \quad \alpha \in (0, 1).$$

Pour $j > k$

$$x_j = \alpha x_j' + (1-\alpha)\, x_j'' = 0.$$

Comme $\alpha > 0$, $(1-\alpha) > 0$, $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$, il vient

$$x_j' = x_j'' = 0 \quad (j = \overline{k+1, n}).$$

Ensuite

$$B\bar{x}' \geqslant \bar{b}, \quad B\bar{x}'' \geqslant \bar{b}, \quad \alpha B\bar{x}' + (1-\alpha)\, B\bar{x}'' = \bar{b},$$

donc

$$B\bar{x}' = B\bar{x}'' = \bar{b},$$

et puisque $\det B \neq 0$, on a $\bar{x}' = \bar{x}''$; par conséquent, $x' = x''$, ce qui contredit l'hypothèse.

La condition est *nécessaire*. Soit x un point anguleux de l'ensemble R_1.

1) Montrons qu'au moins pour un i on a

$$(Ax)_i = b_i.$$

Supposons qu'un tel indice i n'existe pas. Comme $x \neq 0$, il existe un j tel que $x_j > 0$. Considérons

$$(x')^T = (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + \varepsilon, x_{j+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0$$

et

$$(x'')^T = (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j - \varepsilon, x_{j+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0.$$

De l'hypothèse que $Ax > b$ on tire pour ε suffisamment petit

$$Ax' \geqslant b, \quad Ax'' \geqslant b,$$

c'est-à-dire $x' \in R_1$, $x'' \in R_1$. Mais

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x'',$$

ce qui contredit l'hypothèse (par hypothèse, x est un point anguleux).

2) Soient $(Ax)_i = b_i$ pour $i = \overline{1, r}$ et $x_j = 0$ pour $j = \overline{k+1, n}$.

Désignons

$$\bar{a}_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{rp} \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k].$$

Dans ces notations, $\bar{A}\bar{x} = b'$ et $\bar{x} > 0$.

Montrons que $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ sont des vecteurs linéairement indépendants (dans ce cas $k \leqslant r$).

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\bar{x}' \neq 0$ tel que $\bar{A}\bar{x}' = 0$.

Posons

$$x_1 = \begin{pmatrix} \bar{x} + \varepsilon\bar{x}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{pmatrix} \bar{x} - \varepsilon\bar{x}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que pour de petits ε, $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_1$. Mais

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $k \leqslant r$.

En biffant $(r-k)$ lignes de $\bar{A}$, on obtient la matrice B qui vérifie (4.15)-(4.17).

Corollaire. *Le nombre de points anguleux de l'ensemble R_1 est fini.*

Cette proposition est évidente puisque le nombre des cases carrées non singulières (sous-matrices) de la matrice des conditions est fini.

Définition. Si $x^T = (\bar{x}^T, 0, \ldots, 0)$, $\bar{x} > \mathbf{0}$ est un point anguleux, le système de vecteurs linéairement indépendants $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ dans la représentation

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{a}_i, \quad x_i > 0 \quad (i = \overline{1, k})$$

s'appelle *base du point anguleux*, alors que la matrice

$$B = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k]$$

est appelée *matrice de la base du point anguleux.*

4.7. Formes mixtes des problèmes duals

Les problèmes de programmation linéaire de la forme la plus générale sont les problèmes avec contraintes mixtes, lorsque l'ensemble admissible est donné par un système d'égalités et d'inégalités, alors que les variables (en partie ou totalement) peuvent être exemptes de toute contrainte.

Introduisons les notations

$$I = \{i: \ i = 1, 2, \ldots, m\}, \quad J = \{j: \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Supposons que par I_1 on note une partie des indices de I, c'est-à-dire que $I_1 \subseteq I$, et $I_2 = I \setminus I_1$. D'une façon analogue, $J_1 \subseteq J$, $J_2 = J \setminus J_1$. Les deux problèmes

$$\begin{aligned} &\min \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle, \\ &(A\boldsymbol{x})_i \geqslant b_i, \quad i \in I_1, \\ &(A\boldsymbol{x})_i = b_i, \quad i \in I_2, \\ &x_j \geqslant 0, \quad j \in J_1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

et

$$\begin{aligned} &\max \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle, \\ &(A^T\boldsymbol{y})_j \leqslant c_j, \quad j \in J_1, \\ &(A^T\boldsymbol{y})_j = c_j, \quad j \in J_2, \\ &y_i \geqslant 0, \quad i \in I_1, \end{aligned} \tag{4.19}$$

se nomment *problèmes duals avec contraintes mixtes.* De même que dans le cas de (4.1) et (4.2), il est aisé de voir que les problèmes (4.18) et (4.19) sont réciproquement duals.

4.8. Réduction des problèmes avec contraintes mixtes aux problèmes équivalents de forme générale

Ecrivons les problèmes (4.18) et (4.19) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\min [\langle c_1, x_1\rangle + \langle c_2, x_2\rangle], \\ &A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geqslant b_1, \\ &A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} &\max [\langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, y_2\rangle], \\ &A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 \leqslant c_1, \\ &A_{12}^T y_1 + A_{22}^T y_2 = c_2, \\ &y_1 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Les notations $x_1, x_2, c_1, c_2, b_1, b_2, A_{11}, \ldots$, etc., sont naturelles ; par exemple, x_1 est le vecteur constitué des composantes x_j du vecteur x telles que $j \in J_1$; à ce x_1 correspond c_1, etc.

La notation des cases de la matrice est aussi bien claire :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Pour réaliser la réduction, remplaçons chaque égalité (par exemple, $\varphi = 0$) par deux inégalités ($\varphi \geqslant 0$ et $-\varphi \geqslant 0$ ou $\varphi \leqslant 0$ et $-\varphi \leqslant 0$), et au lieu de la variable u sur laquelle les conditions de non-négativité ne sont pas imposées, introduisons les variables non négatives $\bar{u}$ et $\bar{\bar{u}}$ de la façon suivante : $u = \bar{u} - \bar{\bar{u}}$, où

$$\bar{u} = \max \{u, 0\} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \bar{\bar{u}} = \max \{-u, 0\} \geqslant 0.$$

Ainsi, effectuons les changements de variables suivantes:

$$\begin{aligned} &x_2 = \bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2, && && y_2 = \bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2, \\ &\bar{x}_{j2} = \max \{x_{j2}, 0\}, && j \in J_2, && \bar{y}_{i2} = \max \{y_{i2}, 0\}, && i \in I_2, \\ &\bar{\bar{x}}_{j2} = \max \{-x_{j2}, 0\}, && j \in J_2, && \bar{\bar{y}}_{i2} = \max \{-y_{i2}, 0\}, && i \in I_2. \end{aligned}$$

En introduisant ces variables et en remplaçant les égalités par des systèmes appropriés d'inégalités, ramenons les problèmes (4.18) et (4.19) à la forme suivante

$$\begin{aligned} &\min [\langle c_1, x_1\rangle + \langle c_2, \bar{x}_2\rangle - \langle c_2, \bar{\bar{x}}_2\rangle], \\ &A_{11}x_1 + A_{12}\bar{x}_2 - A_{12}\bar{\bar{x}}_2 \geqslant b_1, \\ &A_{21}x_1 + A_{22}\bar{x}_2 - A_{22}\bar{\bar{x}}_2 \geqslant b_2, \\ &-A_{21}x_1 - A_{22}\bar{x}_2 + A_{22}\bar{\bar{x}}_2 \geqslant -b_2, \\ &x_1 \geqslant 0, \quad \bar{x}_2 \geqslant 0, \quad \bar{\bar{x}}_2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &\max\left[\langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, \bar{y}_2\rangle - \langle b_2, \bar{\bar{y}}_2\rangle\right], \\ &A_{11}^T y_1 + A_{21}^T \bar{y}_2 - A_{21}^T \bar{\bar{y}}_2 \leqslant c_1, \\ &A_{12}^T y_1 + A_{22}^T \bar{y}_2 - A_{22}^T \bar{\bar{y}}_2 \leqslant c_2, \\ &-A_{22}^T y_1 - A_{22}^T \bar{y}_2 + A_{22}^T \bar{\bar{y}}_2 \leqslant -c_2, \\ &y_1 \geqslant 0, \quad \bar{y}_1 \geqslant 0, \quad \bar{\bar{y}}_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Il est clair que (4.20) et (4.21) forment un couple dual de problèmes de programmation linéaire de forme générale.

On voit sans peine que les problèmes (4.18) et (4.19) sont équivalents aux problèmes (4.20) et (4.21), et notamment

1) Si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sont optimaux pour (4.18) et (4.19), alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{\bar{x}}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{\bar{y}}_2 \end{pmatrix}$$

sont optimaux pour (4.20) et (4.21), et inversement.

2) Si l'ensemble admissible de (4.18) est vide, l'ensemble admissible de (4.20) est vide lui aussi, et inversement.

3) Si la fonction économique de (4.18) est non bornée inférieurement sur l'ensemble admissible, la fonction économique de (4.20) l'est également, et inversement.

Les propositions 1) à 3) sont justifiées par des raisonnements élémentaires que le lecteur peut réaliser lui-même.

L'équivalence de tous ces problèmes implique que tous les théorèmes démontrés pour (4.20) et (4.21) restent vrais également pour (4.18) et (4.19).

4.9. Forme canonique des problèmes de programmation linéaire

Appelons

$$\min_{x \in R_0} \langle c, x\rangle,$$

$$R_0 = \{x : Ax = b, x \geqslant 0\} \tag{4.22}$$

forme canonique du problème de programmation linéaire.

Ce problème est un cas particulier ($I_1 = \varnothing$ et $J_2 = \varnothing$) du problème avec contraintes mixtes (4.18) ; il s'ensuit que tous les théorèmes et propositions démontrées sont également valables pour cette forme-là.

Pour réduire un problème de forme générale à la forme canonique, on recourt à des variables supplémentaires :

pour la forme générale

$$\min \langle c, x \rangle,$$
$$Ax \geqslant b,$$
$$x \geqslant 0,$$

la forme canonique équivalente sera

$$\min \langle c, x \rangle,$$
$$Ax - u = b,$$
$$x \geqslant 0, \quad u \geqslant 0$$

(l'équivalence est entendue ici de même que pour les problèmes avec contraintes mixtes).

Si l'on remarque que le dual des deux problèmes considérés est

$$\max \langle b, y \rangle,$$
$$A^T y \leqslant c,$$
$$y \geqslant 0,$$

c'est-à-dire le problème (4.19), la démonstration de l'équivalence devient triviale.

Dans ce qui suit, pour un problème canonique, nous supposerons toujours que $m < n$. Cette hypothèse simplifie légèrement l'exposé. Par ailleurs, dans des situations réelles, on introduit toujours des variables supplémentaires qu'on appelle base artificielle, en augmentant par là le nombre de variables de n à $n+m$.

Les raisonnements qui suivent imposent l'introduction de la notion de point anguleux non dégénéré de l'ensemble R_0.

Définition. Un point anguleux de l'ensemble R_0 est dit non dégénéré si la matrice de sa base est de type $m \times m$. Ainsi, le nombre de composantes positives du point anguleux x non dégénéré est m. Si pour simplifier nous admettrons que les premières m composantes de x sont positives, la matrice de base de ce point anguleux non dégénéré sera

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Si de même que précédemment nous écrirons le point anguleux x sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} > 0,$$

alors

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i = B\bar{x} = \bar{b}.$$

Exemple. Soit l'ensemble R_0 donné sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

De la sorte, R_0 est le segment reliant les points

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux points sont des points anguleux, mais ce n'est que le premier (x_1) qui est non dégénéré.

CHAPITRE 5

MÉTHODES FINIES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

Ce chapitre traite des idées et des considérations de principe qui sont à la base des méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire (programmes linéaires). Le lecteur ne trouvera pas ici l'étude détaillée des algorithmes. Pour justifier ceci il faut dire que la connaissance des principes d'une méthode rend assez facile pour le lecteur lui-même l'étude de tel ou tel algorithme. De nombreux ouvrages de programmation linéaire largement connus en donnent des exposés détaillés ; on peut recommander en premier lieu [14]. Enfin, et c'est peut-être le plus important, une étude suivie est nécessaire avant tout pour ceux qui assument la tâche d'appliquer ces algorithmes aux programmes des ordinateurs. Or, là, le plus utile est de consulter les articles et les ouvrages appropriés.

5.1. Méthode du simplexe

La *méthode du simplexe* consiste au fond en une procédure itérative de traitement des points anguleux dans laquelle la valeur de la fonction économique décroît progressivement d'une itération à l'autre (d'un point anguleux à l'autre).

Examinons le problème canonique de programmation linéaire

$$\min_{x \in R_0} \langle c, x \rangle,$$
$$R_0 = \{x: Ax = b, \quad x \geqslant 0\}. \tag{5.1}$$

On suppose que (5.1) est un problème *non dégénéré*, c'est-à-dire que chaque point anguleux de l'ensemble R_0 est non dégénéré.

Une itération de la méthode consiste à passer d'un point anguleux x à un point anguleux x' de façon que la fonction économique décroît :

$$\langle c, x' \rangle < \langle c, x \rangle.$$

Supposons qu'on connaît le point anguleux x. Sans limiter la généralité, on peut admettre que sa base B est constituée de m premières colonnes de la

matrice A. Ecrivons la matrice A sous la forme

$$A = [B, D],$$

où

$$B = [a_1, a_2, \ldots, a_m], \quad D = [a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n].$$

Les vecteurs x et c seront respectivement :

$$x^T = (x_B^T, x_D^T), \qquad c^T = (c_B^T, c_D^T),$$
$$x_B^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_D^T = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n),$$
$$c_B^T = (c_1, c_2, \ldots, c_m), \quad c_D^T = (c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n).$$

On dit quelquefois que les composantes du vecteur x_B sont les *composantes de base*, et les composantes du vecteur x_D, les *composantes hors base*.

Remarquons que si au moins une composante du vecteur x_B est nulle, le point anguleux x est dégénéré. En effet, si, par exemple, $x_m = 0$, en éliminant dans la matrice B la dernière ligne et la dernière colonne, on obtient que x satisfait à un système d'équations à matrice carrée non singulier d'ordre $m-1$, c'est-à-dire que x est un point anguleux dégénéré.

Ainsi, on connaît le point x. De plus,

$$x_B > 0, \quad x_D = 0, \quad \det B \neq 0, \quad Bx_B = b.$$

Considérons les vecteurs

$$x_k = x_k(\lambda) = \begin{pmatrix} x_B - \lambda B^{-1} a_k \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k = \overline{m+1, n}), \tag{5.2}$$

où λ est la k-ième composante du vecteur x.

Constatons en premier lieu que puisque $x_B > 0$, pour de petits $\lambda > 0$, on a $x_k \geqslant 0$. Ensuite, comme

$$Ax_k = \sum_{i=1}^{m} [x_i - \lambda (B^{-1} a_k)_i] a_i + \lambda a_k = Bx_B - \lambda BB^{-1} a_k + \lambda a_k = Bx_B = b, \tag{5.3}$$

il vient que $x_k \in R_0$ pour de petits $\lambda > 0$. En outre,

$$\langle c, x_k \rangle = \langle c_B, x_B \rangle - \lambda \langle c_B, B^{-1} a_k \rangle + \lambda c_k = \langle c, x \rangle - \lambda [\langle c_B, B^{-1} a_k \rangle - c_k].$$

Posons

$$\Delta_k = \langle c_B, B^{-1} a_k \rangle - c_k. \tag{5.4}$$

Remarquons que la grandeur Δ_k est définie quel que soit $k = \overline{1, n}$; de plus, pour $k = \overline{1, m}$, du fait que $B^{-1} a_k = e_k$ (e_k est le k-ième vecteur de base), on a

$$\Delta_k = \langle c_B, B^{-1} a_k \rangle - c_k = \langle c_B, e_k \rangle - c_k = c_k - c_k = 0.$$

On obtient finalement la relation

$$\langle c, x_k \rangle = \langle c, x \rangle - \lambda \Delta_k \quad (k = \overline{1, n}). \tag{5.5}$$

Trois cas peuvent se présenter suivant les signes des grandeurs Δ_k et $(B^{-1}a_k)_i$.

I. Si pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$ on a $\Delta_k \leqslant 0$, alors le point x est optimal.

En effet, désignons

$$\bar{y} = (B^{-1})^T c_B.$$

Alors, la condition $\Delta_k \leqslant 0$ s'écrit

$$\Delta_k = \langle c_B, B^{-1}a_k\rangle - c_k = \langle (B^{-1})^T c_B, a_k\rangle - c_k = \langle \bar{y}, a_k\rangle - c_k \leqslant 0 \quad (k = \overline{1, n})$$

ou, ce qui revient au même,

$$A^T\bar{y} \leqslant c.$$

Puisque le dual du problème (5.1) est

$$\max_{y \in Q_0} \langle b, y\rangle, \quad Q_0 = \{y : A^T y \leqslant c\}, \tag{5.6}$$

on a $\bar{y} \in Q_0$. Et comme

$$\langle c, x\rangle = \langle c_B, x_B\rangle = \langle c_B, B^{-1}b\rangle = \langle (B^{-1})^T c_B, \quad b\rangle = \langle \bar{y}, b\rangle,$$

le théorème 4.4 conduit à l'optimalité du point x.

II. S'il existe un indice $k \geqslant m+1$ tel que

$$\Delta_k > 0 \quad \text{et} \quad B^{-1}a_k \leqslant 0,$$

l'ensemble R_0 est non borné et la fonction $\langle c, x\rangle$ est non bornée inférieurement sur R_0.

En effet, (5.2) entraîne que quel que soit $\lambda > 0$, on a

$$x_k = x_k(\lambda) \geqslant 0.$$

De là et de (5.3) on obtient que $x_k(\lambda) \in R_0$. Or, (5.5) implique que

$$\langle c, x_k(\lambda)\rangle \to -\infty$$

pour $\lambda \to +\infty$.

III. Supposons qu'il existe $k \geqslant m+1$ et $i \leqslant m$ tels que

$$\Delta_k > 0 \quad \text{et} \quad (B^{-1}a_k)_i > 0^*).$$

Dans ce cas on procède à une itération. Posons

$$I_k = \{i : (B^{-1}a_k)_i > 0\}$$

et choisissons

$$\lambda = \lambda_0 = \min_{i \in I_k} \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}a_k)_i} = \frac{(B^{-1}b)_s}{(B^{-1}a_k)_s}. \tag{5.7}$$

Remarquons que $\lambda_0 > 0$, puisque

$$(B^{-1}b)_i = x_i > 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

---

*) Rappelons que l'écriture $(B^{-1}a_k)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $B^{-1}a_k$.

Avec un tel choix de la grandeur λ_0, $x_k = x_k(\lambda_0)$ devient point admissible de l'ensemble R_0 (cf. (5.2) et (5.3)). L'indice s pour lequel on obtient le minimum dans (5.7) est unique par suite de la non-dégénérescence du problème (5.1). En effet, d'après (5.3), si le minimum était atteint pour plus d'un indice, le vecteur $\boldsymbol{b}$ s'exprimerait linéairement avec des coefficients positifs par moins de m vecteurs $\boldsymbol{a}_i$ de la matrice A, c'est-à-dire le point x_k vérifierait le système d'équations de dimension inférieure à m ; par conséquent, le point x_k serait un point anguleux dégénéré. Or, ceci contredit l'hypothèse de la non-dégénérescence. Le fait que x_k est un point anguleux se vérifie sans peine. A cet effet, il suffit de montrer que le système de vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{s-1}, \boldsymbol{a}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_k$ est linéairement indépendant. Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons qu'il existe des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_m, \beta_k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} \beta_i \boldsymbol{a}_i + \beta_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}. \tag{5.8}$$

Introduisons la notation

$$z_{ik} = (B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_i. \tag{5.9}$$

L'identité $BB^{-1}\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_k \equiv \boldsymbol{0}$ se met alors sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik}\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_k \equiv \boldsymbol{0}.$$

En multipliant cette identité par β_k et en l'additionnant avec (5.8), on obtient

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} (\beta_i + \beta_k z_{ik})\,\boldsymbol{a}_i + \beta_k z_{sk}\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{0}.$$

Etant donné que $\det B \neq 0$, cette égalité n'est possible que dans le cas où tous les coefficients sont nuls

$$\beta_i + \beta_k z_{ik} = 0 \quad (i = \overline{1, m},\ i \neq s), \quad \beta_k z_{sk} = 0.$$

Mais

$$z_{sk} = (B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_s > 0,$$

puisque $s \in I_k$, et, donc, $\beta_k = 0$, alors, tous les $\beta_i = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_m, \beta_k$.

Ainsi, x_k est un nouveau point anguleux ; de plus

$$\langle \boldsymbol{c}, x_k \rangle = \langle \boldsymbol{c}, x \rangle - \lambda_0 \Delta_k < \langle \boldsymbol{c}, x \rangle. \tag{5.10}$$

De ce qui vient d'être dit on déduit qu'une itération de la méthode du simplexe consiste à passer d'une base $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{s-1}, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{a}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, à une base $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{s-1}, \boldsymbol{a}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_k$ de façon que la fonction éco-

nomique décroisse ; donc, la méthode du simplexe conduit à un point anguleux x^* où l'on atteint un minimum en un nombre fini d'itérations.

5.2. Relations récurrentes de l'algorithme de la méthode du simplexe (relation entre les paramètres des itérations successives)

Introduisons les notations suivantes :

$$a_0 = b, \quad z_{ik} = (B^{-1}a_k)_i \quad (i = \overline{1, m},\ k = \overline{0, n}),$$
$$z_{0j} = \Delta j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad z_{00} = \langle c, x\rangle.$$

Ainsi, les paramètres associés à un point anguleux x sont les nombres z_{ij} $(i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n})$, et les paramètres associés à un nouveau point anguleux $v \overset{\text{def}}{=} x_k(\lambda_0)$ sont les nombres v_{ij}. La relation entre ces paramètres est établie par les formules suivantes

$$\begin{aligned} v_{ij} &= z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}} \quad (i = \overline{0, m},\ i \neq s,\ j = \overline{0, n}), \\ v_{kj} &= \frac{z_{sj}}{z_{sk}} \quad (j = \overline{0, n}). \end{aligned} \tag{5.11}$$

En effet,

$$a_k = B(B^{-1}a_k) = \sum_{i=1}^{m} z_{ik}a_i;$$

comme par hypothèse $z_{sk} = (B^{-1}a_k)_s > 0$, on a

$$a_s = \frac{1}{z_{sk}}a_k - \sum_i{}' \frac{z_{ik}}{z_{sk}}a_i,$$

où

$$\sum_i{}' \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m}.$$

Ensuite, puisque

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}a_i \quad (j = \overline{0, n}),$$

on a

$$a_j = \sum_i{}' z_{ij}a_i + z_{sj}a_s = \sum_i{}' z_{ij}a_i + z_{sj}\left(\frac{1}{z_{sk}}a_k - \sum_i{}' \frac{z_{ik}}{z_{sk}}a_i\right) =$$
$$= \sum_i{}' \left(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\right)a_i + \frac{z_{sj}}{z_{sk}}a_k.$$

En comparant cette représentation du vecteur a_j et les relations

$$a_j = \sum_i{}' v_{ij}a_i + v_{kj}a_k,$$

qui déterminent les paramètres v_{ij}, on obtient les formules (5.11) pour $j = \overline{0, n}$ et $i = \overline{1, m}$. Pour $i = 0$ et $j = \overline{1, n}$, on a

$$z_{0j} = \langle \boldsymbol{c}_B, B^{-1}\boldsymbol{a}_j \rangle - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i z_{ij} - c_j.$$

C'est pourquoi

$$v_{0j} = \sum_i{}' c_i v_{ij} + c_k v_{kj} - c_j = \sum_i{}' c_i \left(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\right) - c_j + c_k \frac{z_{sj}}{z_{sk}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i\left(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\right) - c_j + c_k \frac{z_{sj}}{z_{sk}} = z_{0j} - \left(\sum_{i=1}^{m} c_i z_{ik} - c_k\right)\frac{z_{sj}}{z_{sk}} = z_{0j} - z_{0k}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}.$$

Enfin, il résulte de (5.10) et (5.7) que

$$v_{00} = z_{00} - \lambda_0 \Delta_k = z_{00} - \frac{z_{s0}}{z_{sk}} z_{0k}.$$

Ainsi, les formules (5.11) sont démontrées.

5.3. Méthodes de recherche du point anguleux initial

Les plus usitées sont les *méthodes de la base artificielle* qui consistent en principe à construire un problème de programmation linéaire canonique auxiliaire à point anguleux connu à l'avance, dont la résolution permet de construire d'une façon triviale soit un point anguleux, soit un point optimal de (5.1). Ainsi, la procédure de recherche du point anguleux est liée à la résolution d'un nouveau problème de programmation linéaire ; il s'ensuit qu'elle impose en général autant de travail que la résolution du problème (5.1), le point anguleux initial étant connu.

Méthode de la base artificielle. On s'attache à trouver le point anguleux de l'ensemble

$$R_0 = \{\boldsymbol{x}\colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}.$$

Sans limiter la généralité, on peut supposer que $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$. Construisons dans l'espace E_{n+m} le problème auxiliaire suivant :

$$\min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \in W} \sum_{i=1}^{m} u_i,$$

$$W = \left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix}\colon A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}\right\} \tag{5.12}$$

le point anguleux

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

de l'ensemble W étant connu à l'avance. En appliquant la méthode du sim-

plexe, on cherche la solution $\begin{pmatrix} x^* \\ u^* \end{pmatrix}$ du problème (5.12). Introduisons la notation

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} u_i^*.$$

Théorème 5.1. *Si* $\mu = 0$, x^* *est un point anguleux de l'ensemble* R_0. *Si* $\mu > 0$, $R_0 = \varnothing$.

Démonstration. Premièrement, il est clair que le problème (5.12) est résoluble, puisque $W \neq \varnothing$ et la fonction économique $\sum_{i=1}^{m} u_i$ est bornée inférieurement par zéro. Si $\mu = 0$,

$$\begin{pmatrix} x^* \\ u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

est le point anguleux optimal de (5.12), puisque ce problème se résout par la méthode du simplexe qui est une procédure itérative appliquée aux points anguleux. Il est évident que x^* est un point anguleux de l'ensemble R_0. Soit maintenant $\mu > 0$. Supposons que $R_0 \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in R_0$. Mais alors

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une solution du problème (5.12), ce qui contredit l'hypothèse que la grandeur μ est positive.

Remarquons que la méthode de la base artificielle est partie composante de la plupart des programmes standard de la méthode du simplexe établis pour les calculs sur machine.

L'application de cette méthode rend nécessaire la résolution de (5.1) en deux phases : la première portant sur le problème auxiliaire (5.12) et la seconde, sur le problème (5.1) lui-même. La méthode suivante permet de réunir les deux étapes en une seule.

M-méthode. Considérons le problème auxiliaire suivant

$$\min_{x,\, u \in W} \left[\langle c, x \rangle + M \sum_{i=1}^{m} u_i \right],$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} : Ax + u = b, \quad x \geqslant 0, \quad u \geqslant 0 \right\}. \tag{5.13}$$

Théorème 5.2. *Si le problème* (5.1) *est résoluble, il existe un nombre* M_0 *tel que pour tout* $M \geqslant M_0$, *quelle que soit la solution* $\begin{pmatrix} x^* \\ u^* \end{pmatrix}$ *du problème* (5.13), *le point* x^* *sera un point optimal du problème* (5.1).

Démonstration. Celle-ci est au fond une variante de la démonstration du théorème 10.9 relatif à la convergence de la M-méthode pour le problème de programmation convexe. Nous reproduisons ici la première partie de cette démonstration.

D'après la condition, le problème (5.1) est résoluble, c'est-à-dire il existe un point optimal x^*. Mais le problème dual

$$\langle b, y^* \rangle = \max_{y \in Q_0} \langle b, y \rangle,$$
$$Q_0 = \{y: A^T y \leqslant c\}$$

est alors résoluble lui aussi. D'après le théorème 4.4, x^* et y^* vérifient le système suivant :

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0, \quad A^T y \leqslant c, \quad \langle c, x \rangle = \langle b, y \rangle. \tag{5.14}$$

Puisque le problème

$$\max_{y \in P} \langle b, y \rangle, \quad P = \{y: A^T y \leqslant c, \quad y_i \leqslant M \quad (i = \overline{1, m})\}$$

est le dual du (5.13), la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une solution de (5.13) (et, par conséquent, d'une solution du dual) est l'existence d'une solution du système d'inégalités

$$\begin{gathered} Ax + u = b, \quad x \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad A^T y \leqslant c, \quad y_i \leqslant M \\ (i = \overline{1, m}), \quad \langle c, x \rangle + M \sum_{i=1}^{m} u_i = \langle b, y \rangle. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Comme x^* et y^* vérifient le système (5.14), $x = x^*$, $u = u^* = 0$, $y = y^*$ vérifient le système (5.15) pour tout

$$M \geqslant M_0 = \max \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\}.$$

Dans le théorème 10.9, le lecteur trouvera la démonstration du fait que pour $M \geqslant M_0$, quelle que soit la solution x^*, u^* du problème (5.13), $u^* = 0$, et par conséquent, x^* est une solution du problème (5.1).

Discussion. Il est clair que pour $b \geqslant 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

est un point anguleux de l'ensemble W. C'est précisément ce point qu'on prend comme point initial pour appliquer l'algorithme du simplexe.

Pratiquement, on n'a pas à définir le nombre M_0. On prend pour M un nombre assez grand, par exemple

$$M > \max_{\substack{i = \overline{1, n} \\ j = \overline{1, m}}} \{|a_{ij}|, |c_i|, |b_j|\}.$$

Enfin, constatons que si le M-problème (5.13) possède une solution, le système d'inégalités (5.15) en possède aussi une, et donc $Q_0 \neq \varnothing$. Il en

résulte d'après le théorème 4.6, que si $R_0 \neq \varnothing$ et si le M-problème possède une solution, le problème initial (5.1) en possède une également. C'est pourquoi si pour le M-problème il existe une solution et si l'ensemble R_0 est non vide, le théorème 5.2 est vrai. On aboutit ainsi à la conclusion suivante : s'il existe des valeurs M aussi grandes que l'on veut et telles que dans la solution $\begin{pmatrix} x^* \\ u^* \end{pmatrix}$ de (5.13) on ait

$$\max_{i=\overline{1,m}} u_i^* > 0,$$

le problème initial (5.1) est irrésoluble.

5.4. Dégénérescence. Méthode des perturbations

Lorsqu'un point anguleux x de l'ensemble R_0 est dégénéré, le nombre de ses composantes positives est inférieur à m. Il peut s'avérer alors que $\lambda_0 = 0$ (cf. (5.7)) et que la valeur de la fonction économique ne décroît pas (cf. (5.10)) lorsqu'on passe dans la méthode du simplexe du point anguleux dégénéré x au point anguleux successif. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà vu, en passant du point anguleux x au point anguleux dégénéré $x_k = x_k(\lambda_0)$, la dégénérescence peut rendre non univoque le choix du vecteur à éliminer de la base.

Théoriquement, ces circonstances peuvent amener le phénomène du cyclage, lorsque après un certain nombre d'itérations, la procédure de la méthode du simplexe conduit au point anguleux antérieur. Pour parer au cyclage, il existe une règle qui régit le choix du vecteur à éliminer de la base, fondée sur ce qu'on appelle la méthode des perturbations.

Supposons qu'au point anguleux x d'un ensemble R_0 correspond un système linéairement indépendant de m vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, tel que $x_B = B^{-1}b \geqslant 0$ (à la différence du cas non dégénéré, pour lequel $x_B > 0$), où $B = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$.

Considérons le vecteur « perturbé »

$$b(\varepsilon) = b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_j,$$

où ε est un nombre positif suffisamment petit ($\varepsilon > 0$) et ε^j symbolise la puissance j du nombre ε. En désignant toujours $z_{ij} = (B^{-1}a_j)_i$, on obtient

$$b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \sum_{i=1}^{m} z_{ij} a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \varepsilon^j \right) a_i.$$

Puisque

$$z_{ij} = \begin{cases} z_{ij} & (j = \overline{m+1, n}), \\ 0 & (j \neq i, j = \overline{1, m}), \\ 1 & (j = i, j = \overline{1, m}), \end{cases}$$

il vient

$$x_i(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} x_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\varepsilon^j = x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}\varepsilon^j \quad (i = \overline{1, m}). \tag{5.16}$$

Considérons avec le problème (5.1)

$$\min_{x \in R_0} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle,$$

$$R_0 = \{\boldsymbol{x} : \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0\},$$

ce qu'on appelle le ε-problème

$$\min_{x(\varepsilon) \in R_0(\varepsilon)} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}(\varepsilon) \rangle,$$

$$R_0(\varepsilon) = \{\boldsymbol{x}(\varepsilon) : \ A\boldsymbol{x}(\varepsilon) = \boldsymbol{b}(\varepsilon), \quad \boldsymbol{x}(\varepsilon) \geqslant \boldsymbol{0}\} \tag{5.17}$$

et montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit c'est un problème non dégénéré.

Soit $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ un système linéairement indépendant arbitraire de vecteurs de la matrice A. Les fonctions $x_i(\varepsilon)$ $(i = \overline{1, m})$ étant des polynômes par rapport à ε non identiquement nuls (cf. (5.16)), chacun d'eux possède au plus n racines, et, par conséquent, au plus n racines positives.

Soit η la plus petite de toutes les racines positives des m polynômes $x_i(\varepsilon)$ $(i = \overline{1, m})$ (si aucun de ces polynômes ne possède de racines positives, on prend $\eta = \infty$). La quantité η est définie par le système choisi de vecteurs linéairement indépendants $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, et comme le nombre de systèmes linéairement indépendants de vecteurs de la matrice A est fini, le nombre de racines positives correspondantes η est fini lui aussi.

Supposons que $\varepsilon_0 > 0$ soit le plus petit des nombres (c'est-à-dire, la plus petite racine positive de tous les polynômes $x_i(\varepsilon)$ construits à partir de toute sorte de systèmes linéairement indépendants de vecteurs de la matrice A). Il est clair que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ aucun des polynômes de la forme (5.16) ne s'annule $(\varepsilon > 0)$ et, par conséquent, tout point anguleux du ε-problème possède m composantes positives, c'est-à-dire est non dégénéré.

On peut montrer que pour de petits ε, aux points anguleux $\boldsymbol{x} \in R_0$ et $\boldsymbol{x}(\varepsilon) \in R_0(\varepsilon)$ correspond une même base*); il s'ensuit que pour rendre univoque le choix de l'indice $s \in I_k$ pour lequel $\dfrac{(B^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_i}$ atteint le minimum (cf. (5.7)) dans la procédure simpliciale de la résolution du problème (5.1), il est avantageux d'appliquer le ε-problème. A cet effet, il convient de choisir comme indice s du vecteur $\boldsymbol{a}_s$ à éliminer de la base l'indice (unique, le ε-problème étant non dégénéré) pour lequel on obtient le minimum de la relation

$$\frac{x_s(\varepsilon)}{(B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_s} = \min_{i \in I_k} \frac{(B^{-1}\boldsymbol{b}(\varepsilon))_i}{(B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_i} = \min_{i \in I_k} \left[\frac{x_i}{z_{ik}} + \varepsilon \frac{z_{i1}}{z_{ik}} + \varepsilon^2 \frac{z_{i2}}{z_{ik}} + \ldots + \varepsilon^n \frac{z_{in}}{z_{ik}}\right].$$

*) La justification rigoureuse de cette proposition est donnée dans [14].

Dans la pratique, aucun besoin n'est de passer au ε-problème. La formule précédente montre avec évidence que l'indice s peut être choisi de la façon suivante.

Désignons par $I_{k0}(s_k)$ l'ensemble des indices $s_k \in I_k$ réalisant le minimum de la relation

$$\frac{x_{s_k}}{z_{s_k k}} = \min_{i \in I_k} \frac{x_i}{z_{ik}}, \quad s_k \in I_{k0}(s_k).$$

Si $I_{k0}(s_k)$ se compose de plus d'un élément, on calcule

$$\frac{z_{s_l 1}}{z_{s_l k}} = \min_{s_k \in I_{k0}(s_k)} \frac{z_{s_k 1}}{z_{s_k k}}, \quad s_l \in I_{k1}(s_l).$$

Si $I_{k1}(s_l)$ se compose d'un élément, s_l est alors précisément l'indice recherché. Si $I_{k1}(s_l)$ compte deux et plus d'éléments, on calcule

$$\frac{z_{s_p 2}}{z_{s_p k}} = \min_{s_l \in I_{k1}(s_l)} \frac{z_{s_l 2}}{z_{s_l k}},$$

etc. Il est clair que ce processus est fini et qu'il conduit à un choix univoque de l'indice recherché.

L'application pratique de la méthode du simplexe témoigne que pour rendre impossible le cyclage, il suffit d'adopter l'une quelconque des procédures régulières du choix univoque de l'indice s; on peut choisir comme s, par exemple, le premier indice (dans l'ordre de la numérotation donnée) réalisant le minimum de (5.7). De plus, naturellement le choix de l'indice k (s'il n'est pas unique) doit se faire aussi suivant une procédure régulière; par exemple, parmi tous les k tels que $\Delta_k > 0$ et $(B^{-1}a_k)_i > 0$ on doit choisir celui dont la grandeur Δ_k est la plus petite.

5.5. Remarque sur l'application de la méthode du simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire de classes spéciales

Tout problème de programmation linéaire quelle que soit sa forme pouvant être ramené à une forme canonique équivalente dans cette discipline, la méthode du simplexe est dans un certain sens universelle.

Toutefois, nous avons vu qu'en général en réduisant à la forme canonique, on augmente considérablement les dimensions de la matrice des conditions. Ceci impose, à son tour, premièrement, une mémoire opératoire volumineuse des ordinateurs (alors que son volume est très limité), et deuxièmement, une forte augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour assurer la résolution du problème.

Toutes ces considérations ont rendu nécessaire de ranger les problèmes typiques dans des classes spéciales et de concevoir pour ces classes des versions appropriées de la méthode du simplexe.

Parmi ces classes il y a en premier lieu les problèmes avec contraintes

bilatérales sur les variables, lorsque l'ensemble admissible est donné par des conditions de la forme $Ax = b$, $d_1 \leqslant x \leqslant d_2$.

Un examen détaillé des algorithmes simpliciaux relatifs à de tels problèmes est donné dans [14].

5.6. Forme révisée de la méthode du simplexe

Dans la méthode du simplexe usuelle, à chaque itération on transforme suivant les formules (5.11) tous les éléments de la matrice A. La méthode révisée consiste à calculer à chaque itération la matrice B^{-1} et puis en l'appliquant à calculer

$$\tilde{y} = (B^{-1})^T c_B, \quad \Delta_k = \langle \tilde{y}, a_k \rangle - c_k, \quad B^{-1}b,$$

etc. Ensuite, on utilise les formules de récurrence bien simples pour passer de la matrice

$$B^{-1} = [a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_m]^{-1}$$

à la matrice

$$\bar{B}^{-1} = [a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_k, a_{s+1}, \ldots, a_m]^{-1},$$

associée au nouveau point anguleux.

Ainsi, pendant une itération, un ordinateur n'a à traiter et à conserver en mémoire que les éléments de la matrice B^{-1}. De plus, en général, le volume de l'information courante à retenir diminue. Par ailleurs, si un grand nombre d'éléments de la matrice A sont nuls, l'algorithme de la méthode révisée peut être composé de la sorte que le calcul à chaque itération des produits scalaires se fasse avec des éléments non nuls de la matrice A. Ainsi, on réduit sensiblement le volume des calculs en rendant plus compact l'emmagasinage des éléments non nuls de la matrice A dans la mémoire de la machine.

Les relations récurrentes de la méthode peuvent s'obtenir à partir des formules de passage de la matrice B^{-1} à la matrice $\bar{B}^{-1}$.

Désignons les éléments de la matrice B^{-1} par a_{ij}^{-1}, et ceux de la matrice $\bar{B}^{-1}$ par $\bar{a}_{ij}^{-1}$:

$$B^{-1} = [a_{ij}^{-1}], \quad \bar{B}^{-1} = [\bar{a}_{ij}^{-1}].$$

Alors,

$$\bar{a}_{ij}^{-1} = a_{ij}^{-1} - z_{ik} \frac{a_{sj}^{-1}}{z_{sk}}, \quad i \neq s,$$

$$\bar{a}_s^{-1} = \frac{a_{sj}^{-1}}{z_{sk}}.$$

Pour justifier ces formules, on multiplie la matrice $\bar{B}$ par la matrice $\bar{B}^{-1}$ en obtenant la matrice unité.

5.7. Forme produit de la matrice inverse

Pour diminuer la quantité de l'information à retenir, on utilise souvent dans la méthode révisée la forme produit suivante de la matrice inverse.

Appelons matrice élémentaire une matrice de la forme

$$G_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & w_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & w_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & w_{sk} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{mk} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

où

$$w_{ik} = -\frac{z_{ik}}{z_{sk}}, \quad i \neq s,$$

$$w_{sk} = \frac{1}{z_{sk}}$$

(l'indice s signifie que la colonne des éléments w_{jk} est à la s-ième place). On vérifie aisément que

$$G_s B^{-1} = \bar{B}^{-1}.$$

La procédure de la méthode du simplexe modifiée démarre ordinairement à partir de la base unité à laquelle correspond la matrice unité G. Supposons qu'à la première itération, au lieu de e_{s_1} on introduit dans la base le vecteur a_{k_1}. Alors, la matrice B_1^{-1}, inverse à la matrice de la base nouvelle, sera

$$B_1^{-1} = G_{s_1} G,$$

et à la p-ième itération

$$B_p^{-1} = G_{s_p} G_{s_{p-1}} \dots G_{s_1} G.$$

Comme chaque matrice G_s est définie par $(m+1)$ grandeurs s, w_{1k}, w_{2k}, ..., w_{mk}, la forme produit de l'inverse est moins encombrante pour la mémoire d'une machine que la forme usuelle.

Remarque. Une description détaillée de la forme révisée ainsi que de la forme produit de l'inverse est donnée dans [14].

5.8. Méthode duale du simplexe

Comme nous l'avons vu, la méthode du simplexe permet tout en obtenant la solution du problème primal obtenir également la solution

$$\bar{y} = (B^{-1})^T c_B$$

du problème dual (cas I de la méthode du simplexe). Ce résultat est à la base de la méthode duale de résolution du problème (5.1).

Cette méthode consiste en principe à passer successivement en revue les points anguleux de l'ensemble admissible Q_0 du dual (5.6) en rendant croissante la valeur de la fonction économique $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle$, c'est-à-dire à appliquer la méthode du simplexe à la résolution du dual. Puisque cette méthode nous intéresse comme un moyen pour résoudre le problème (5.1), voyons quelle est la signification pour (5.1) des transformations réalisées à chaque itération de la méthode du simplexe appliquée au problème (5.6).

Supposons que le problème (5.6) soit non dégénéré, c'est-à-dire qu'à chaque point anguleux de l'ensemble Q_0 corresponde un système d'équations carré non singulier (non dégénéré) de dimension m, dont la matrice s'appelle *base duale du primal* (5.1).

Soit $\boldsymbol{y}$ un point anguleux connu de l'ensemble Q_0. Cela signifie qu'on connaît la base duale

$$B = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m],$$

que le point $\boldsymbol{y} = (B^{-1})^T \boldsymbol{c}_B$ vérifie l'inégalité

$$\Delta = A^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{0}$$

et que

$$\Delta_i = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i \rangle - c_i = (A^T \boldsymbol{y})_i - c_i = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i = \overline{1, m}, \\ \Delta_i < 0 & \text{pour} \quad i = \overline{m+1, n}. \end{cases}$$

Toujours dans les mêmes notations

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}, \quad z_{ik} = (B^{-1}\boldsymbol{a}_k)_i$$

et, de plus,

$$B^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [\boldsymbol{a}_1^{-1}, \boldsymbol{a}_2^{-1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m^{-1}],$$

c'est-à-dire on a noté par $\boldsymbol{a}_i^{-1}$ la i-ième colonne de la matrice B^{-1}.

Examinons les vecteurs

$$\boldsymbol{y}_s \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{y}_s(\theta) = \boldsymbol{y} - \theta \boldsymbol{a}_s^{-1}, \quad s = \overline{1, m}.$$

Puisque

$$\langle \boldsymbol{a}_s^{-1}, \boldsymbol{a}_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i = \overline{1, m}, \; i \neq s, \\ 1 & \text{pour} \quad i = s, \\ z_{si} & \text{pour} \quad i = \overline{m+1, n}, \end{cases}$$

on a

$$(A^T \boldsymbol{y}_s)_i = \langle \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{a}_i \rangle = \begin{cases} c_i & \text{pour} \quad i = \overline{1, m}, \; i \neq s, \\ c_s - \theta & \text{pour} \quad i = s, \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_i \rangle - \theta z_{si} = \Delta_i - \theta z_{si} + c_i & \text{pour} \quad i = \overline{m+1, n}. \end{cases} \tag{5.18}$$

Trois cas peuvent se présenter suivant les signes des quantités x_j et z_{ij}.

I. Si $x_B \geqslant 0$, on a

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \in R_0$$

et donc, x est optimal (cf. le cas I de la méthode du simplexe).

II. S'il existe un indice $s \leqslant m$ tel que $x_s < 0$ et $z_{si} \geqslant 0$ pour tout $i = \overline{m+1, n}$, alors $y_s \in Q_0$ quel que soit $\theta > 0$ et, par suite, l'ensemble Q_0 est non borné et

$$\langle b, y_s \rangle = \langle b, y \rangle - \theta \langle b, a_s^{-1} \rangle = \langle b, y \rangle - \theta x_s \to +\infty$$

pour $\theta \to +\infty$, c'est-à-dire l'ensemble R_0 est vide (corollaire du théorème 4.6).

III. Etant donné $s \leqslant m$ et $i \geqslant m+1$ tels que $x_s < 0$ et $z_{si} < 0$, on réalise une itération. Désignons $I_s = \{i : z_{si} < 0\}$ et choisissons

$$\theta = \theta_0 = \min_{i \in I_s} \frac{\Delta_i}{z_{si}} > 0.$$

Soit

$$\theta_0 = \frac{\Delta_k}{z_{sk}}, \quad k \in I_s. \tag{5.19}$$

L'indice k pour lequel ce minimum est atteint est unique, le problème (5.6)*) étant non dégénéré.

Montrons que

$$y_s = y_s(\theta_0) = y - \theta_0 a_s^{-1} \in Q_0.$$

En effet, (5.18) et (5.19) entraînent

$$(A^T y_s)_i \begin{cases} = c_i & \text{pour} \quad i = \overline{1, m} \quad i \neq s, \\ < c_s & \text{pour} \quad i = s, \\ < c_i & \text{pour} \quad i = \overline{m+1, n}, \\ = c_k & \text{pour} \quad i = k. \end{cases}$$

Enfin,

$$\langle b, y_s \rangle = \langle b, y \rangle - \theta_0 \langle b, a_s^{-1} \rangle = \langle b, y \rangle - \theta_0 x_s > \langle b, y \rangle.$$

Ainsi, lors du passage du point y au point y_s, la valeur de la fonction économique de (5.6) s'accroît.

---

*) La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition similaire du « cas III » de la méthode du simplexe.

En résumé, une itération de la méthode duale du simplexe consiste à éliminer de la base duale le vecteur a_s pour le remplacer par le vecteur a_k; dans ces conditions, la valeur de la fonction économique s'accroît. Il reste à démontrer que le nouveau système de vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_k, a_{s+1}, \ldots, a_m$ est linéairement indépendant, c'est-à-dire qu'il forme une nouvelle base duale. Le lecteur pourrait le vérifier sans peine en raisonnant d'une façon analogue au « cas III » de la méthode du simplexe.

Le nombre de points anguleux de l'ensemble Q_0 étant fini, et à chaque itération (passage d'un point anguleux à un autre) la valeur de la fonction économique s'accroissant, la méthode aboutit en un nombre fini d'itérations à la solution y^* du dual, et donc à la solution x^* du primal.

Les relations récurrentes de l'algorithme de la méthode duale s'obtiennent facilement à partir des formules de passage de la matrice B^{-1} à la matrice $\bar{B}^{-1}$ (cf. paragraphe 5.6).

Si le problème dual est dégénéré, alors, de même que dans le cas primal, il existe des règles établies sur la base de la méthode des perturbations, permettant de réaliser le choix univoque de l'indice de la quantité θ_0, c'est-à-dire les règles du choix du vecteur à introduire dans la base duale.

5.9. Estimation par résolution du problème dual

Montrons que pour certains changements des composantes du vecteur des contraintes b du problème (5.1), les composantes de la solution du dual (5.6) peuvent être interprétées comme des estimations de l'action exercée par ces changements sur le minimum de la fonction économique de (5.1).

Considérons le problème

$$\min_{x \in R_0(z)} \langle c, x \rangle, \qquad R_0(z) = \{x : Ax = z, x \geqslant 0\} \tag{5.20}$$

et son dual:

$$\max_{y \in Q_0} \langle z, y \rangle, \qquad Q_0 = \{y : A^T y \leqslant c\}. \tag{5.21}$$

Sous l'hypothèse que (5.20) est résoluble pour un certain z, notons

$$\mu(z) = \min_{x \in R_0(z)} \langle c, x \rangle.$$

Supposons que pour $z = z^*$ le problème (5.20) possède une solution x^*, et donc, le problème (5.21) possède une solution y^*.

Théorème 5.3. *Si le problème* (5.20) *est non dégénéré, il existe un voisinage* $U(z^*)$ *du point* z^* *tel que pour tout* $z \in U(z^*)$ *on ait*

$$\mu(z) = \langle z, y^* \rangle.$$

Démonstration. Puisque pour $z = z^*$ (5.20) est résoluble, d'après le théorème 4.8 il existe un point anguleux optimal x^*. Supposons

que x^* s'écrive

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m^* \end{pmatrix} > 0.$$

La base qui lui correspond est $B = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$, $\det B \neq 0$, et $x_B^* = B^{-1}z^*$. Introduisons la notation

$$\alpha = \min_{i=\overline{1,m}} x_i^*.$$

Adoptons le voisinage suivant :

$$U(z^*) = \left\{z: \ \|z - z^*\| \leqslant \frac{\alpha}{\|B^{-1}\|}\right\}.$$

Montrons que le point

$$x^T = (x_B^T, \quad 0, \ldots, 0),$$

où $x_B = B^{-1}z$ est un point optimal du problème (5.20) quel que soit $z \in U(z^*)$. En effet,

$$\|x_B^* - x_B\| = \|B^{-1}(z^* - z)\| \leqslant \|B^{-1}\| \, \|z^* - z\| \leqslant \alpha,$$

où la norme est choisie de la façon suivante :

$$\|x_B^* - x_B\| = \max_{i=\overline{1,m}} |x_i^* - x_i|.$$

On obtient que

$$x_i^* - x_i \leqslant \alpha \quad (i = \overline{1, m}),$$

c'est-à-dire

$$x_j \geqslant x_j^* - \alpha = x_j^* - \min_{i=\overline{1,m}} x_i^* \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Ainsi, $x \geqslant 0$. En outre, par construction, $Ax = z$, c'est-à-dire $x \in R_0(z)$.

Prouvons que x est optimal pour le problème (5.20). Les conditions (4.6) impliquent qu'à tout $x_i^* > 0$ $(i = \overline{1, m})$ est associé

$$(A^T y^*)_i = c_i.$$

Il vient

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i = \sum_{i=1}^{m} (A^T y^*)_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, y^*\rangle\, x_i =$$

$$= \left\langle y^*, \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\rangle = \langle y^*, Bx_B\rangle = \langle y^*, z\rangle.$$

Puisque $x \in R_0(z)$ et $y^* \in Q_0$, le théorème 4.4 implique l'optimalité des points x et y^*, ainsi que

$$\mu(z) = \langle y^*, z\rangle.$$

Le théorème est démontré.

Il est évident que

$$\frac{\partial \mu(z)}{\partial z_i} = y_i^*,$$

c'est pourquoi avec l'augmentation de z_i la grandeur $\mu(z)$ croît ou décroît en fonction du signe de y_i^*. De plus, la rapidité avec laquelle $\mu(z)$ change est définie par la valeur de $|y_i^*|$.

Dans les ouvrages des auteurs russes la méthode duale du simplexe s'appelle également *méthode d'amélioration successive des estimations* du fait que les points anguleux du problème (5.6) apparus dans les itérations peuvent être considérés comme des valeurs approchées de l'estimation de y^*, c'est-à-dire comme des estimations approchées de l'influence exercée par les conditions du problème (5.1) sur le minimum de la fonction économique.

5.10. Application de la méthode duale du simplexe aux problèmes avec contraintes supplémentaires

Soient x^* et y^* les points anguleux optimaux trouvés des problèmes (5.1) et (5.6) respectivement. Supposons que dans le système de conditions qui définissent l'ensemble admissible R_0 on ait introduit une inégalité supplémentaire

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqslant b_{m+1}.$$

Si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* \geqslant b_{m+1},$$

x^* est également optimal pour le nouveau problème du fait qu'en ajoutant des conditions on ne peut qu'augmenter la valeur du minimum de la fonction économique. Cherchons comment on peut obtenir la solution d'un nouveau problème dans le cas

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* < b_{m+1}$$

si l'on connaît les points anguleux optimaux x^* et y^*.

Ecrivons ce nouveau problème sous la forme canonique, en introduisant une variable supplémentaire x_{n+1}. Notons

$$\bar{\alpha}^T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ \alpha^T \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y \\ y_{m+1} \end{pmatrix},$$

e_{m+1} est le $(m+1)$-ième vecteur de base unité. Le nouveau problème se met alors sous la forme

$$\begin{gathered} \min \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle, \\ [\bar{A}, -e_{m+1}]\, \bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.22}$$

D'après les règles (4.18)-(4.19), le dual de (5.22) est

$$\begin{gathered} \max [\langle b, y \rangle + b_{m+1} y_{m+1}], \\ A^T y + \alpha y_{m+1} \leqslant c, \\ y_{m+1} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Comme y^* est un point anguleux du problème (5.6),

$$\bar{y}^* = \begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

sera un point anguleux du problème (5.23) du fait que l'indépendance linéaire du système de vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, base du point anguleux y^*, entraîne l'indépendance linéaire du système de vecteurs

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il est logique maintenant, en adoptant $\bar{y}^*$ comme point anguleux initial, de résoudre (5.22) par la méthode duale du simplexe. Le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution de (5.22) n'est pas en général très grand.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit dans ce paragraphe est valable si aux inégalités définissant l'ensemble R_0 on en ajoute non pas une égalité mais plusieurs.

5.11. Méthode primale-duale

Les méthodes examinées dans ce qui précède comptaient deux phases. La première consistait à définir un point anguleux d'un ensemble admissible, après quoi la deuxième phase, en partant du point anguleux établi, avait pour tâche de construire un processus de recherche du point optimal. Les deux phases nécessitaient en général le même volume de travail. La procédure itérative de la méthode primale-duale démarre à partir d'un point admissible quelconque (non forcément anguleux) du dual, dont la recherche dans des

cas réels ne présente aucune difficulté. Par exemple, si $c \geqslant 0$, $y = 0$ appartient alors à l'ensemble Q_0.

Ainsi, considérons le problème canonique primal

$$\min_{x \in R_0} \langle c, x \rangle,$$

$$R_0 = \{x: \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b, \quad x \geqslant 0, \quad b \geqslant 0\} \tag{5.1}$$

et son dual

$$\max_{y \in Q_0} \langle b, y \rangle,$$

$$Q_0 = \{y: \langle a_i, y \rangle \leqslant c_j, \quad j = \overline{1, n}\}. \tag{5.6}$$

Supposons connu le point $y_0 \in Q_0$. Posons

$$J = \{j: j = \overline{1, n}\}, \quad J(y_0) = \{j: \langle a_j, y_0 \rangle = c_j, \quad j \in J\}$$

et considérons le problème dit complété

$$\min \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j + \varepsilon = b, \tag{5.24}$$

$$x \geqslant 0, \quad \varepsilon \geqslant 0,$$

où $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$; rendons-le « restreint » de la façon suivante :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i,$$

$$\sum_{j \in J(y_0)} z_j a_j + \varepsilon = b, \tag{5.25}$$

$$z_j \geqslant 0, \quad j \in J(y_0), \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

Le théorème suivant est à la base de la méthode concernée.

Théorème 5.4. *Si dans une solution z^*, ε^* du problème* (5.25) $\varepsilon^* = 0$, *le point x^* tel que*

$$x_j^* = \begin{cases} z_j^*, & j \in J(y_0), \\ 0, & j \in J \setminus J(y_0), \end{cases}$$

est un point optimal du problème (5.1) *et y_0 un point optimal du problème* (5.6).

Démonstration. Il est évident que $x^* \in R_0$. Le fait que y_0 est un point admissible de (5.6) et que $\varepsilon^* = 0$ conduit à

$$\langle c, x^* \rangle = \sum_{j \in J(y_0)} c_j x_j^* + \sum_{j \in J \setminus J(y_0)} c_j x_j^* = \sum_{j \in J(y_0)} c_j z_j^* =$$

$$= \sum_{j \in J(y_0)} \langle a_j, y_0 \rangle z_j^* = \langle y_0, \sum_{j \in J(y_0)} z_j^* a_j \rangle = \langle y_0, b \rangle.$$

Vu que $x^* \in R_0$, $y_0 \in Q_0$ et $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y_0 \rangle$, en vertu du théorème 4.4, x^* et y_0 sont optimaux. Le théorème est démontré.

Construisons le dual de (5.25)

$$\begin{gathered} \max \langle b, u \rangle, \\ \langle a_j, u \rangle \leqslant 0, \quad j \in J(y_0), \\ u_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{5.26}$$

Les problèmes (5.25) et (5.26) sont résolubles. En effet, comme $b \geqslant 0$, $z_j = 0$, $j \in J(y_0)$ et $\varepsilon = b$ sont admissibles pour (5.25), alors que $u = 0$ est un point admissible de (5.26) ; donc, d'après le théorème 4.6, les deux problèmes sont résolubles.

Soit u^* la solution du problème (5.26). Désignons

$$\Delta^0 = A^T y_0 - c$$

et

$$\delta^* = A^T u^*.$$

Trois cas peuvent se présenter suivant le caractère des grandeurs ε_i^* $(i = \overline{1, m})$ et $\delta_j^*, j \in J$.

I. Si

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* = 0,$$

alors, en vertu du théorème 5.4, le point x^* est une solution du problème (5.1).

II. Soit

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0$$

et supposons qu'il existe un indice $j \in J \setminus J(y_0)$ tel que $\delta_j^* > 0$. Dans ce cas on construit un nouveau point $y \in Q_0$, auquel est associée une plus grande valeur de la fonction économique du problème (5.6).

Posons

$$y \overset{\text{def}}{=} y(\mu) = y_0 - \mu u^*.$$

Il vient

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} A^T y - c = A^T y_0 - \mu A^T u^* - c = \Delta^0 - \mu \delta^*. \tag{5.27}$$

Constatons que

$$\Delta_j^0 = \begin{cases} 0, & j \in J(y_0), \\ \Delta_j^0 < 0, & j \in J \setminus J(y_0), \end{cases} \qquad \delta_j^* = \begin{cases} \delta_j^* \leqslant 0, & j \in J(y_0), \\ \delta_j^*, & j \in J \setminus J(y_0). \end{cases} \tag{5.28}$$

En choisissant

$$\mu_0 = \frac{\Delta_k^0}{\delta_k^*} = \max_{\delta^* j > 0} \frac{\Delta_j^0}{\delta^*} < 0, \tag{5.29}$$

on obtient que

$$\Delta^0 - \mu_0 \delta^* \leqslant \mathbf{0},$$

et donc, en vertu de (5.27), $y = y(\mu_0) \in Q_0$. Puisque z^*, ε^* est la solution du problème (5.25), et u^* la solution de son dual (5.26), il vient

$$\langle b, u^* \rangle = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$$

(théorème 4.2). Il s'ensuit que

$$\langle b, y \rangle = \langle b, y_0 \rangle - \mu_0 \langle b, u^* \rangle = \langle b, y_0 \rangle - \mu_0 \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > \langle b, y_0 \rangle,$$

puisque $\mu_0 < 0$ et

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0.$$

Ainsi, une itération de la méthode consiste à résoudre le problème restreint (5.25), calculer la grandeur μ_0 et construire un nouveau point $y = y(\mu_0)$. De plus, à cette première itération on choisit comme point anguleux initial de (5.25) le point de composantes $z_j = 0$, $j \in J(y_0)$ et $\varepsilon_i = b_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$ pour appliquer ensuite la méthode du simplexe. A l'itération suivante on construit un nouveau problème restreint

$$\begin{gathered} \min \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i, \\ \sum_{j \in J(y)} z_j a_j + \varepsilon = b, \qquad (5.30) \\ z_j \geqslant 0, \quad j \in J(y), \quad \varepsilon \geqslant \mathbf{0}, \end{gathered}$$

et on reprend la procédure. Comme point anguleux initial de (5.30) on choisit le point dont les coordonnées non nulles sont les composantes positives du point anguleux optimal z^*, ε^* du problème (5.25), puisque

$$\{j : z_j^* > 0\} \subseteq J(y).$$

Cette inclusion résulte du fait qu'aux valeurs $z_j^* > 0$ correspondent les valeurs

$$\delta_j^* = \langle a_j, u^* \rangle = 0$$

(ainsi que de la relation de la forme (4.6) appliquée aux solutions des problèmes (5.25) et (5.26)) et, par conséquent (cf. (5.27) et (5.28)),

$$\Delta_j = \langle a_j, y \rangle - c_j = \Delta_j^0 - \mu_0 \delta_j^* = 0.$$

Mais, par construction,

$$J(y) = \{j : \Delta_j = \langle a_j, y \rangle - c_j = 0\}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

La procédure de résolution du problème (5.30) démarre par l'introduction dans la base du vecteur $\boldsymbol{a}_k$ (l'indice k est choisi d'après (5.29)). Remarquons que $k \in J(\boldsymbol{y})$, puisque $\Delta_k = 0$ (cf. (5.29)). Cette procédure fait que la quantité $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ diminue par rapport à $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$. En effet, les valeurs

$$x_j^* = \begin{cases} z_j^*, & j \in J(\boldsymbol{y}_0), \\ 0, & j \in J \backslash J(\boldsymbol{y}_0), \end{cases}$$

et

$$\varepsilon_i^* \quad (i = \overline{1, m})$$

forment un point anguleux de l'ensemble admissible du problème (5.24). A l'introduction de $\boldsymbol{a}_k$ dans la base du problème (5.30) correspond l'itération usuelle de la méthode du simplexe de la résolution de (5.24) (cf. (5.29)). Mais si le problème (5.24) est non dégénéré, chaque itération de la méthode du simplexe diminue la valeur de la fonction économique, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ devient plus petite que $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$. Il s'ensuit qu'à chaque itération de la méthode primale-duale, c'est-à-dire en résolvant un nouveau problème restreint, la valeur optimale de la fonction économique $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ décroît par rapport à sa valeur optimale dans le problème restreint antérieur. Il en résulte que cette méthode est une méthode finie. Remarquons également que puisque chaque problème de la forme (5.30) possède un point anguleux initial, alors que la variation de l'ensemble des indices $J(\boldsymbol{y})$ d'une itération à l'autre est négligeable, le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le problème (5.30) par la méthode du simplexe n'est pas grand.

III. Si $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0$ et $\delta^* \leqslant \mathbf{0}$, on a

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\mu) = \boldsymbol{y}_0 - \mu \boldsymbol{u}^* \in Q_0$$

quel que soit $\mu < 0$, puisque

$$\boldsymbol{\Delta} = A^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Delta}^0 - \mu \delta^* \leqslant \boldsymbol{\Delta}^0 = A^T \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{c} \leqslant \mathbf{0}.$$

Mais

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}_0 \rangle - \mu \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^* \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}_0 \rangle - \mu \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* \to +\infty$$

pour $\mu \to -\infty$, c'est-à-dire $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle$ est non bornée sur Q_0, et, par suite, $R_0 = \varnothing$ (corollaire du théorème 4.6).

Ainsi, la méthode primale-duale consiste à construire une suite des solutions des problèmes restreints tant qu'on n'obtient le cas I qui fournit la solution, ou le cas III, qui montre que $R_0 = \varnothing$.

CHAPITRE 6

MÉTHODE DES PÉNALITÉS

6.1. Description de la méthode

Généralement, les méthodes numériques de minimisation sans contrainte et les méthodes de programmation mathématique diffèrent qualitativement quant au volume de travail qu'elles imposent pour résoudre les problèmes envisagés. Ainsi, par exemple, en plus des difficultés qui apparaissent dans la méthode du gradient (p. 9.5), appliquée aux problèmes de minimisation sans contrainte, la résolution par la méthode du gradient lié (p. 10.1) des problèmes de programmation mathématique impose en plus la résolution à chaque itération d'un problème de programmation linéaire. Sous ce rapport il serait peut-être très avantageux de ramener un problème de programmation mathématique à une suite de problèmes de minimisation sans contrainte.

Voici en quoi consiste le principe de la méthode des pénalités. Le problème initial de programmation mathématique

$$\min_{x \in X} \varphi(x) = m \tag{6.1}$$

est remplacé par un problème de minimisation sans contrainte d'une famille de fonctions à un paramètre

$$M(x, \beta) = \varphi(x) + \frac{1}{\beta} \psi(x),$$

ou bien par un problème de minimisation de la fonction $M(x, \beta)$ sur un ensemble Γ de structure plus simple que l'ensemble initial X du point de vue des méthodes numériques de minimisation. De plus, la fonction $\psi(x)$ est choisie de façon que la solution du problème

$$\min_{x \in \Gamma} M(x, \beta) = m(\beta) \tag{6.2}$$

converge pour $\beta \to 0$ vers la solution du problème initial, ou bien, si ceci est impossible, de façon à assurer au moins que $m(\beta) \to m$ pour $\beta \to 0$.

Ainsi, la méthode des pénalités consiste à construire la fonction $M(x, \beta)$, à choisir une suite $\{\beta_k\}$ et à résoudre les problèmes de la forme (6.2) associés à cette suite.

Considérons l'ensemble X donné sous la forme suivante :

$$X = \{x \in \Gamma : g(x) \geqslant 0\},$$

où

$$g^T(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)),$$

alors que, comme nous l'avons dit précédemment, la structure de l'ensemble Γ est simple. En général, $\Gamma = E_n$ et alors (6.2) est un problème de minimisation sans contrainte, ou bien $\Gamma = \{x : x \geqslant 0\}$, ou bien $\Gamma = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$. Dans les deux derniers cas, la complexité de nombreuses méthodes numériques de résolution du problème (6.2) est à peu près la même que dans le cas où $\Gamma = E_n$.

Définition. La fonction continue

$$\frac{1}{\beta}\psi(x),$$

définie quels que soient $x \in \Gamma$ et $\beta > 0$, s'appelle *pénalité* si $\psi(x)$ est telle que

$$\begin{aligned} &\psi(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in X, \\ &\psi(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma \setminus X. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Le choix de la fonction $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} [\min \{g_i(x), 0\}]^2 \tag{6.4}$$

est très usité.

Evidemment, pour un tel choix de la fonction $\psi(x)$ les conditions (6.3) sont vérifiées.

Voici une illustration de la méthode des pénalités. Soit

$$X = \{x \in E_1 : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Alors,

$$\psi(x) = [\min \{b-x, 0\}]^2 + [\min \{x-a, 0\}]^2.$$

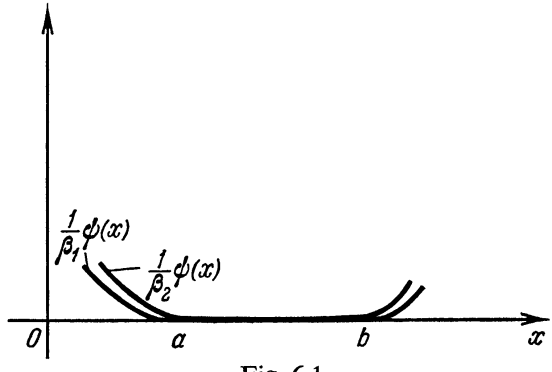

Fig. 6.1

La figure 6.1 représente la fonction $\frac{1}{\beta}\psi(x)$ pour deux valeurs distinctes de β: $\beta_1 > \beta_2 > 0$.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit linéaire. La figure 6.2 représente les fonctions $M(x, \beta_1)$ et $M(x, \beta_2)$. Les points y_{β_1} et y_{β_2} sont les solutions des problèmes correspondants de la forme (6.2), c'est-à-dire les points des

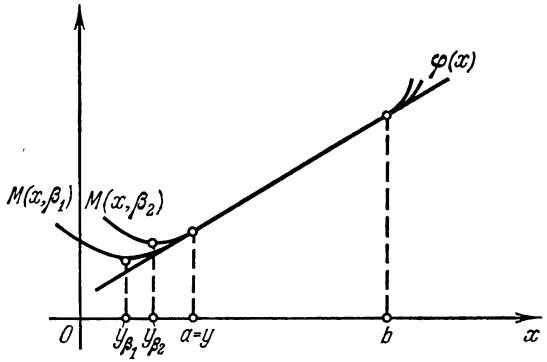

Fig. 6.2

minimums absolus des fonctions $M(x, \beta_1)$ et $M(x, \beta_2)$. y désigne la solution du problème initial (6.1), c'est-à-dire le point du minimum de la fonction linéaire $\varphi(x)$ sur le segment $[a, b]$. La figure 6.2 montre que pour $\beta_k \to 0$, les points respectifs y_{β_k} tendent vers y.

Si (6.1) est un problème de programmation convexe, c'est-à-dire si $\varphi(x)$ est convexe, les fonctions $g_i(x)$ sont concaves et l'ensemble Γ est convexe, alors la fonction $\psi(x)$ définie par (6.4) est convexe (cf. paragraphe 2.10) sur l'ensemble Γ et (6.2) devient problème de minimisation d'une fonction convexe $M(x, \beta)$ sur un ensemble convexe Γ.

Souvent le problème

$$\min_{x \in X} \varphi(x),$$

où

$$X = \{x \in E_n : g(x) \geqslant 0\},$$

est remplacé par un problème équivalent qui consiste à minimiser $\varphi(x)$ sous les conditions $g(x) - u = 0$ et $u \geqslant 0$ en adoptant comme pénalité la fonction quadratique

$$\frac{1}{\beta}\psi(x, u) = \frac{1}{\beta}\|g(x) - u\|^2.$$

(6.2) devient alors un problème de minimisation de la fonction

$$M(x, u, \beta) = \varphi(x) + \frac{1}{\beta}\psi(x, u)$$

sur l'ensemble $x \in E_n$, $u \geqslant 0$.

Il existe encore de nombreux exemples du choix de la fonction $\psi(x)$; on peut prendre, par exemple,

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} \min\{g_i(x), 0\}$$

ou

$$\frac{1}{\beta}\psi(x) = \beta \exp\left[\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} \min\{g_i(x), 0\}\right],$$

etc. Pourtant, le choix d'une pénalité doit être adapté aux méthodes de minimisation de la fonction $M(x, \beta)$, et donc, comme nous allons le voir dans ce qui suit, il faut savoir si la pénalité est lisse, si le calcul des valeurs de la fonction $M(x, \beta)$ et de ses dérivées est simple, si la fonction jouit des propriétés de convexité, etc.

Enfin, quelques mots sur la dénomination. Le terme « méthode des pénalités » est très naturel, puisqu'il traduit le principe même de la méthode : si les contraintes sont violées, c'est-à-dire si $x \in \Gamma \setminus X$, la fonction $\varphi(x)$ est frappée d'une pénalité égale à $\frac{1}{\beta}\psi(x)$.

6.2. Théorèmes de la convergence

On dit qu'une fonction

$$\Psi(x, \beta) = \beta\varphi(x) + \psi(x),$$

définie pour tout $\beta > 0$ sur un ensemble Γ est une *pénalité* dont est frappé le problème (6.1) si $\psi(x)$ vérifie les conditions (6.3). Il est évident que

$$\Psi(x, \beta) = \beta M(x, \beta).$$

Remarquons que cette forme de la pénalité estompe quelque peu son sens « physique » : pénaliser pour la violation des contraintes ; pourtant, dans ce qui suit, il devient clair que dans la réalisation numérique des méthodes de minimisation de la fonction $\Psi(x, \beta)$ cette forme-là présente dans plusieurs cas des avantages par rapport à $M(x, \beta)$.

Soit le point $y_\beta \in \Gamma$ solution du problème

$$\min_{x \in \Gamma} \Psi(x, \beta) = \Psi(y_\beta, \beta).$$

Désignons par y la solution du problème (6.1) :

$$\min_{x \in X} \varphi(x) = \varphi(y).$$

Théorème 6.1. *L'existence de y et y_β implique*

$$\lim_{\beta \to 0} \Psi(y_\beta, \beta) = 0 \tag{6.5}$$

et

$$\lim_{\beta \to 0} \psi(y_\beta) = 0. \tag{6.6}$$

Démonstration. 1. Montrons d'abord que pour $\beta_1 \geqslant \beta_2 > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{\beta_1} \Psi(y_{\beta_1}, \beta_1) \leqslant \frac{1}{\beta_2} \Psi(y_{\beta_2}, \beta_2). \tag{6.7}$$

Du fait que

$$\Psi(y_{\beta_1}, \beta_1) = \min_{x \in \Gamma} \Psi(x, \beta_1) \leqslant \Psi(y_{\beta_2}, \beta_1),$$

et de l'inégalité

$$\frac{1}{\beta_1} \psi(y_{\beta_2}) \leqslant \frac{1}{\beta_2} \psi(y_{\beta_2})$$

on tire

$$\frac{1}{\beta_1} \Psi(y_{\beta_1}, \beta_1) \leqslant \varphi(y_{\beta_2}) + \frac{1}{\beta_1} \psi(y_{\beta_2}) \leqslant \varphi(y_{\beta_2}) + \frac{1}{\beta_2} \psi(y_{\beta_2}) = \frac{1}{\beta_2} \Psi(y_{\beta_2}, \beta_2).$$

Ensuite, puisque $\psi(y) = 0$, il vient

$$\Psi(y_\beta, \beta) \leqslant \Psi(y, \beta) = \beta\varphi(y) + \psi(y) = \beta\varphi(y),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\beta} \Psi(y_\beta, \beta) \leqslant \varphi(y).$$

Ceci entraîne avec (6.7) (c'est-à-dire avec le fait que la fonction $\frac{1}{\beta} \Psi(y_\beta, \beta)$ est monotone par rapport à β) l'existence de la grandeur finie

$$\Psi^* = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \Psi(y_\beta, \beta),$$

et donc, la relation (6.5).

2. Montrons d'abord que pour $\beta_1 > \beta_2 > 0$

$$\varphi(y_{\beta_1}) \leqslant \varphi(y_{\beta_2}). \tag{6.8}$$

Les inégalités

$$\Psi(y_{\beta_1}, \beta_1) \leqslant \Psi(y_{\beta_2}, \beta_1)$$

et

$$\Psi(y_{\beta_2}, \beta_2) \leqslant \Psi(y_{\beta_1}, \beta_2)$$

amènent

$$\beta_1\varphi(y_{\beta_1}) + \psi(y_{\beta_1}) \leqslant \beta_1\varphi(y_{\beta_2}) + \psi(y_{\beta_2}),$$
$$\beta_2\varphi(y_{\beta_2}) + \psi(y_{\beta_2}) \leqslant \beta_2\varphi(y_{\beta_1}) + \psi(y_{\beta_1}).$$

En additionnant ces inégalités, on obtient

$$(\beta_1 - \beta_2)\,[\varphi(y_{\beta_1}) - \varphi(y_{\beta_2})] \leqslant 0,$$

et comme $\beta_1 - \beta_2 > 0$, on a

$$\varphi(y_{\beta_1}) - \varphi(y_{\beta_2}) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire on aboutit à (6.8).

Ensuite, puisque $\psi(x) \geqslant 0$, il vient

$$\varphi(y_\beta) \leqslant \varphi(y_\beta) + \frac{1}{\beta}\psi(y_\beta) = \frac{1}{\beta}\Psi(y_\beta, \beta) \leqslant \Psi^*.$$

On en déduit avec (6.8) (c'est-à-dire du fait que $\varphi(y_\beta)$ est monotone) l'existence de la grandeur finie

$$\varphi^* = \lim_{\beta \to 0} \varphi(y_\beta).$$

Donc (cf. (6.5)),

$$\lim_{\beta \to 0} \psi(y_\beta) = \lim_{\beta \to 0} [\Psi(y_\beta, \beta) - \beta\varphi(y_\beta)] = 0.$$

Le théorème est démontré.

Il est clair maintenant que pour calculer les pénalités il est commode de les chercher sous la forme

$$\Psi(x, \beta) = \beta\varphi(x) + \psi(x),$$

étant donné que $\beta\varphi(y_\beta) \to 0$ et $\psi(y_\beta) \to 0$ et en calculant les valeurs de $\Psi(y_\beta, \beta)$ on additionne les quantités voisines.

La réalisation numérique de la méthode des pénalités pose le problème du choix de la valeur initiale β_0 du paramètre β et du mode de changement de β_k. On tombe ici sur la difficulté suivante. Le choix d'un β_0 suffisamment petit permet de s'attendre que y_{β_0} sera proche de y. Or, en général, la rapidité de convergence des méthodes du gradient qui permettent de calculer les points des minimums de $\Psi(x, \beta)$ décroît avec la diminution de β. On s'en convainc aisément en étudiant, par exemple, la rapidité avec laquelle converge (9.9), qui dépend linéairement de la grandeur $1/L$, où L est la constante de Lipschitz de la formule

$$\| \Psi'(x', \beta) - \Psi'(x'', \beta) \| \leqslant L \| x' - x'' \|.$$

Quant à la grandeur L, elle est minorée par la fonction linéaire de β : $\beta\lambda_1 + \mu_1$ (λ_1 est la plus petite valeur propre de la matrice $\varphi''(x)$, et μ_1 la plus petite valeur propre de la matrice $\psi''(x)$), qui décroît pour $\beta \to 0$ et qui, dans le cas de $\mu_1 = 0$, tend vers zéro pour $\beta \to 0$.

Ainsi, le choix de β_0 petit rend très proches y_{β_0} et y, mais définit souvent une convergence très lente des méthodes numériques de minimisation de la fonction $\Psi(x, \beta_0)$. En choisissant β_0 grand, on inverse la situation.

Théorème 6.2. *Si*

(a) $\varphi(x)$ et $g(x)$ *sont continues sur* Γ;

(b) *il existe des solutions* y *et* y_β *pour tout* $\beta > 0$;

(c) *il existe un compact* $Y \subseteq \Gamma$ *tel que* $y_\beta \in Y$, *alors*

$$\lim_{\beta \to 0} \varphi(y_\beta) = \varphi(y);$$

(d) *si, de plus, l'élément* y *est unique, on a*

$$\lim_{\beta \to 0} y_\beta = y.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre $\delta > 0$ et une suite $\{\beta_k\} \to 0$ pour $k \to \infty$, tels que pour tout $k = 0, 1, \ldots$ on ait l'inégalité

$$|\varphi(y_{\beta_k}) - \varphi(y)| \geqslant \delta.$$

Etant donné que $\psi(x) \geqslant 0$ pour tout x, et $\psi(y) = 0$, on a

$$\beta_k \varphi(y_{\beta_k}) \leqslant \beta_k \varphi(y_{\beta_k}) + \psi(y_{\beta_k}) = \Psi(y_{\beta_k}, \beta_k) \leqslant \Psi(y, \beta_k) = \\ = \beta_k \varphi(y) + \psi(y) = \beta_k \varphi(y). \qquad (6.9)$$

Puisque $y_{\beta_k} \in Y$, posons sans changer de numérotation que

$$\lim_{k \to \infty} y_{\beta_k} = \bar{y}.$$

On obtient alors de (6.9) que

$$\varphi(\bar{y}) \leqslant \varphi(y).$$

Mais, en vertu de (6.6),

$$\psi(\bar{y}) = \lim_{\beta_k \to 0} \psi(y_{\beta_k}) = 0$$

et, par conséquent, $\bar{y} \in X$; on aboutit donc à l'égalité

$$\varphi(\bar{y}) = \varphi(y),$$

qui contredit notre hypothèse. Enfin, supposons que l'élément y est unique. Supposons encore que la proposition (d) soit fausse, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\delta > 0$ et une suite $\{\beta_k\} \to 0$ pour $k \to \infty$ tels que pour tout $k = 0, 1 \ldots$ on ait l'inégalité

$$\| y_{\beta_k} - y \| \geqslant \delta.$$

Par des raisonnements analogues on obtient que

$$\varphi(\bar{y}) = \varphi(y),$$

d'où, vu l'unicité de y, on a l'égalité

$$y = \bar{y} = \lim_{\beta_k \to 0} y_{\beta_k},$$

qui contredit notre hypothèse.

Théorème 6.3. *Si les fonctions* $g_i(x)$ *sont concaves et continues sur un ensemble convexe et fermé* Γ, *alors que la fonction* $\varphi(x)$ *est fortement convexe*

et continue sur Γ, on a

$$\lim_{\beta \to 0} y_\beta = y.$$

Démonstration. La fonction

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} [\min \{g_i(x), 0\}]^2$$

étant convexe (cf. paragraphe 2.10) et continue, la convexité forte et la continuité de la fonction $\varphi(x)$ font que la fonction $\Psi(x, \beta)$ est également fortement convexe et continue; il existe donc des points y et y_β qui sont, de plus, uniques (cf. paragraphe 2.13, propriété 2). Il résulte de (6.9) que $\varphi(y_\beta) \leqslant \varphi(y)$, et donc, $\{y_\beta\}$ est un compact (paragraphe 2.13, propriété 2). Ainsi, toutes les conditions du théorème 6.2 sont remplies et, de ce fait, $y_\beta \to y$ lorsque $\beta \to 0$.

6.3. Application de la méthode des pénalités à la programmation linéaire

L'intérêt que présente la méthode des pénalités pour la résolution des problèmes de programmation linéaire est défini par les estimations qui caractérisent la rapidité de convergence de la méthode.

Considérons le problème (4.22)

$$\min_{x \in R_0} \langle c, x \rangle,$$

$$R_0 = \{x : Ax = b, x \geqslant 0\}.$$

Supposons qu'il soit résoluble, c'est-à-dire que

$$m = \langle c, y \rangle = \min_{x \in R_0} \langle c, x \rangle.$$

Construisons la fonction de pénalité

$$\Psi(x, \beta) = \beta \langle c, x \rangle + \| Ax - b \|^2, \quad \beta > 0,$$

et examinons le problème

$$\min_{x \geqslant 0} \Psi(x, \beta). \tag{6.10}$$

Puisque, par hypothèse, le problème (4.22) est résoluble, il existe une solution w du problème dual de (4.22), c'est-à-dire telle que

$$\langle b, w \rangle = m,$$

$$A^T w \leqslant c.$$

Théorème 6.4. *Si le problème* (4.22) *est résoluble, il existe*

$$m(\beta) = \min_{x \geqslant 0} \Psi(x, \beta)$$

et

$$\beta m - \frac{1}{4}\beta^2 \| w \|^2 \leqslant m(\beta) \leqslant \beta m. \tag{6.11}$$

Démonstration. Constatons d'abord que, quel que soit $x \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$\langle c, x\rangle \geqslant \langle w, Ax\rangle.$$

Ensuite, quel que soit $x \geqslant 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\beta\langle c, x\rangle + \| Ax-b\|^2 &= \beta m - \beta\langle b, w\rangle + \beta\langle c, x\rangle + \\ &+ \| Ax-b\|^2 \geqslant \beta m - \beta\langle b, w\rangle + \beta\langle w, Ax\rangle + \| Ax-b\|^2 = \\ &= \beta m + \beta\langle w, Ax-b\rangle + \| Ax-b\|^2 = \\ &= \beta m + \left\| (Ax-b) + \frac{1}{2}\beta w \right\|^2 - \frac{1}{4}\beta^2 \| w\|^2 \geqslant \beta m - \frac{1}{4}\beta^2 \| w\|^2.\end{aligned}$$

Il en résulte l'existence*) de

$$\inf_{x \geqslant 0} \Psi(x, \beta) = m(\beta) \geqslant \beta m - \frac{1}{4}\| w\|^2.$$

Mais

$$m(\beta) \leqslant \beta\langle c, y\rangle + \| Ay-b\|^2,$$

et comme $\langle c, y\rangle = m$ et

$$\| Ay-b\|^2 = 0,$$

on aboutit finalement aux inégalités (6.11).

Soit y_β la solution du problème (6.10):

$$\Psi(y_\beta, \beta) = \min_{x \geqslant 0} \Psi(x, \beta) = m(\beta).$$

Evaluons la quantité $\| Ay_\beta - b\|^2$. Etant donné que

$$m(\beta) = \beta\langle c, y_\beta\rangle + \| Ay_\beta - b\|^2 \leqslant \beta m,$$

en profitant du fait que

$$y_\beta \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \langle c, y_\beta\rangle \geqslant \langle w, Ay_\beta\rangle,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\| Ay_\beta - b\|^2 &\leqslant \beta m - \beta\langle c, y_\beta\rangle = \beta\langle b, w\rangle - \beta\langle c, y_\beta\rangle \leqslant \beta\langle b, w\rangle - \beta\langle w, Ay_\beta\rangle = \\ &= \beta\langle w, b - Ay_\beta\rangle = \beta\langle w, b - Ay_\beta\rangle + \frac{1}{4}\beta^2 \| w\|^2 - \frac{1}{4}\beta^2 \| w\|^2.\end{aligned}$$

C'est pourquoi

$$\left\| (Ay_\beta - b) + \frac{1}{2}\beta w \right\|^2 \leqslant \frac{1}{4}\beta^2 \| w\|^2.$$

*) On peut prouver que si une fonction quadratique est bornée inférieurement sur l'ensemble $x \geqslant 0$, il existe $y_\beta \geqslant 0$ tel que $m(\beta) = \Psi(y_\beta, \beta)$.

Il vient

$$\left|(Ay_\beta - b)_i + \frac{1}{2}\beta w_i\right| \leqslant \frac{1}{2}\beta \|w\|$$

pour tout $i = \overline{1, m}$. Ensuite

$$|(Ay_\beta - b)_i| \leqslant \left|(Ay_\beta - b)_i + \frac{1}{2}\beta w_i\right| + \frac{1}{2}\beta |w_i| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\beta\|w\| + \frac{1}{2}\beta\|w\| = \beta\|w\|.$$

Et donc,

$$\|Ay_\beta - b\|^2 \leqslant n\beta^2 \|w\|^2. \tag{6.12}$$

Enfin, évaluons la grandeur $|\langle c, y_\beta\rangle - m|$. De (6.11) on déduit que

$$|m(\beta) - \beta m| \leqslant \frac{1}{4}\beta^2 \|w\|^2. \tag{6.13}$$

Puisque

$$\beta\langle c, y_\beta\rangle + \|Ay_\beta - b\|^2 = m(\beta),$$

on a

$$|m(\beta) - \beta\langle c, y_\beta\rangle| = \|Ay_\beta - b\|^2.$$

De là et de (6.12) et (6.13) il résulte que

$$\beta|\langle c, y_\beta\rangle - m| \leqslant |\beta\langle c, y_\beta\rangle - m(\beta)| + |m(\beta) - \beta m| \leqslant$$

$$\leqslant \|Ay_\beta - b\|^2 + \frac{1}{4}\beta^2\|w\|^2 \leqslant n\beta^2\|w\|^2 + \frac{1}{4}\beta^2\|w\|^2 =$$

$$= \beta^2\left(n + \frac{1}{4}\right)\|w\|^2.$$

Ainsi,

$$|\langle c, y_\beta\rangle - m| \leqslant \beta\left(n + \frac{1}{4}\right)\|w\|^2. \tag{6.14}$$

CHAPITRE 7

STABILITÉ DANS LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

7.1. Problèmes correctement et incorrectement posés

L'information initiale d'un nombre important de problèmes pratiques dont les modèles mathématiques sont des problèmes de programmation mathématique a un caractère approximatif. Il est donc nécessaire de ranger en des classes particulières les problèmes et les méthodes numériques de minimisation pour lesquels les petites perturbations de l'information initiale sont négligeables, c'est-à-dire n'influent pas beaucoup sur la solution.

Considérons le problème de recherche des éléments $y \in X$ tels que

$$\varphi(y) = \min_{x \in X} \varphi(x), \tag{7.1}$$

où

$$X = \{x \in \Gamma:\ f(x) \geqslant 0\},$$

et $f(x)$ est une fonction vectorielle,

$$f^T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

alors que $\varphi(x)$ et $f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ sont des fonctions scalaires continues données.

Dans la pratique, l'information sur $\varphi(x)$ et $f(x)$ est approximative, c'est-à-dire au lieu de $\varphi(x)$ et $f(x)$ on connaît les fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ et $f_\varepsilon(x)$ définies sur l'ensemble Γ et telles que

$$\varphi_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x) \in P_\varepsilon(\varphi, f) = \{\varphi_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x):\ |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon,$$
$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon,\ x \in \Gamma\}.$$

De plus, le choix des fonctions φ_ε et f_ε de l'ensemble P_ε ne dépend pas de nous. Ainsi, pour décider de la solution y du problème initial on juge d'après la solution y_ε du problème approché

$$\varphi(y_\varepsilon) = \min_{x \in X_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x), \tag{7.2}$$

où

$$X_\varepsilon = \{x \in \Gamma:\ f_\varepsilon(x) \geqslant 0\},$$

tiré arbitrairement de la classe des problèmes approchés.

Soient

$$G = \left\{ y \in X : \varphi(y) = \min_{x \in X} \varphi(x) \right\} \neq \varnothing$$

et

$$G_\varepsilon = \left\{ y_\varepsilon \in X_\varepsilon : \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) = \min_{x \in X_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) \right\} \neq \varnothing .$$

Disons que le problème (7.1) est un *problème correctement posé au sens faible*, si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y_\varepsilon \in G_\varepsilon} \inf_{y \in G} \| y_\varepsilon - y \| = 0. \tag{7.3}$$

Appelons (7.1) problème *correctement posé* si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{z', z'' \in Z} \| z' - z'' \| = 0, \tag{7.4}$$

où $Z = G_\varepsilon \cup G$.

Expliquons ces définitions. La relation limite (7.3) traduit le fait que la famille des ensembles G_ε tend pour $\varepsilon \to 0$ vers un sous-ensemble de G. Dans la terminologie de «ε, δ» cela signifie que quel que soit $\delta > 0$, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et tout $y_\varepsilon \in G_\varepsilon$, il existe un $y \in G$ tel que $\| y_\varepsilon - y \| \leqslant \delta$. Il s'ensuit que, quel que soit $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que quels que soient $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et $\varphi_\varepsilon \in P_\varepsilon$, on ait

$$| \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) - \varphi(y) | \leqslant \delta.$$

(Nous laissons au lecteur le soin de justifier cette proposition.) De cette façon, dire que le problème est correctement posé au sens faible signifie qu'il est correctement posé par rapport à la fonctionnelle:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) = \varphi(y).$$

La condition (7.4) signifie que la famille des ensembles G_ε tend pour $\varepsilon \to 0$ vers l'ensemble G composé d'un élément unique y. C'est-à-dire pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et $y_\varepsilon \in G_\varepsilon$ quels qu'ils soient, on ait

$$\| y_\varepsilon - y \| \leqslant \delta.$$

Il est évident qu'un problème correctement posé est toujours un problème correctement posé au sens faible, mais la réciproque n'est pas vraie.

Disons que le problème (7.1) est *incorrectement posé* si la condition (7.4) est compromise.

Dans le cas d'un problème (7.1) incorrectement posé il existe toujours pour $\varepsilon > 0$ donné des couples φ_ε, f_ε et $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, $\tilde{f}_\varepsilon$ appartenant à l'ensemble $P_\varepsilon(\varphi, f)$ tels que les solutions y_ε et $\tilde{y}_\varepsilon$ des problèmes correspondants de la forme (7.2) diffèrent sensiblement et ne portent de ce fait d'information suffisante sur la solution du problème initial.

Exemple 1. Considérons dans E_2 un couple de problèmes

$$\begin{gathered} \min\,(-x_1-x_2), \\ x_1+x_2 \leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{gathered} \tag{7.5}$$

et

$$\begin{gathered} \min\,(-x_1-x_2), \\ (1+|\varepsilon|+\varepsilon)\,x_1+(1+|\varepsilon|-\varepsilon)\,x_2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Il est évident que le problème (7.5) est correctement posé au sens faible tout en étant incorrectement posé.

Exemple 2.

$$\begin{gathered} \min\, x_2, \\ x_1+x_2 = 1, \\ (1+|\varepsilon|+\varepsilon)\,x_1+(1+|\varepsilon|-\varepsilon)\,x_2 = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Il est évident que pour $\varepsilon = 0$ le problème (7.7) est incorrectement posé et, plus même, n'est pas correctement posé au sens faible.

Les méthodes fondamentales de résolution des problèmes de programmation mathématique étaient élaborées sous l'hypothèse tacite que le problème est correctement posé. Par exemple, la procédure pour résoudre les problèmes de programmation mathématique

$$\min_{x \in R_0} \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle,$$

$$R_0 = \{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

par la méthode du simplexe peut être interprétée de la façon suivante : à chaque itération de la méthode, les éléments de la matrice A et les composantes des vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ se transforment en A', $\boldsymbol{b}'$ et $\boldsymbol{c}'$ d'après les formules des transformations identiques (d'après les formules de l'élimination complète de Jordan-Gauss) et si la réalisation de toutes les transformations est exacte, l'itération conduit à un nouveau problème

$$\min_{x \in R_0'} \langle \boldsymbol{c}', \boldsymbol{x} \rangle,$$

$$R_0' = \{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

équivalent au problème initial. Dans la pratique, pour calculer on procède par arrondissement, et c'est pourquoi dans des cas réels une itération conduit non pas à un problème équivalent, mais à un nouveau problème approché. On comprend donc que si un problème est incorrectement posé, sa solution approchée peut trancher nettement sur celle du problème initial. Ces dernières années, les mathématiciens se sont penchés sur l'élaboration des méthodes de résolution des problèmes incorrectement posés. Parmi les méthodes principales de ce type, il y a celle dite de *régularisation*, centrée

sur l'approximation des problèmes incorrectement posés par des problèmes correctement posés. A la lumière de ce fait il convient en premier lieu de relever les classes des problèmes correctement posés.

7.2. Une classe des problèmes correctement posés

Considérons le problème (7.1) et le problème

$$\varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) = \min_{x \in X} \varphi_\varepsilon(x). \tag{7.8}$$

Portons notre attention sur le fait qu'à la différence de (7.2) l'ensemble admissible de (7.8) est le même que celui de (7.1); on a donc ici

$$G_\varepsilon = \left\{ y_\varepsilon \in X : \ \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) = \min_{x \in X} \varphi_\varepsilon(x) \right\}.$$

Théorème 7.1. *Si une fonction $\varphi(x)$ est fortement convexe sur un ensemble X,*

$$\varphi_\varepsilon(x) \in P_\varepsilon(\varphi) = \{\varphi_\varepsilon(x) : \ |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X\}$$

et $G_\varepsilon \neq \varnothing$, alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et quel que soit $\varphi_\varepsilon(x) \in P_\varepsilon(\varphi)$ on ait

$$\| y_\varepsilon - y \| \leqslant \delta,$$

et, par suite, le problème (7.1) *est correctement posé.*

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ étant fortement convexe, on a l'inégalité (cf. (2.24))

$$\| y_\varepsilon - y \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} [\varphi(y_\varepsilon) - \varphi(y)], \tag{7.9}$$

où ϱ est le paramètre de convexité forte.

Puisque $\varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) \leqslant \varphi_\varepsilon(y)$, on a

$$\varphi(y_\varepsilon) - \varphi(y) = [\varphi(y_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon)] + [\varphi_\varepsilon(y_\varepsilon) - \varphi(y)] \leqslant$$
$$\leqslant [\varphi(y_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(y_\varepsilon)] + [\varphi_\varepsilon(y) - \varphi(y)] \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci entraîne avec (7.9) l'estimation

$$\| y_\varepsilon - y \|^2 \leqslant \frac{4\varepsilon}{\varrho}.$$

De la sorte,

$$\| y_\varepsilon - y \| \leqslant \delta$$

pour tout

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4} \varrho \delta^2\right].$$

7.3. Problèmes avec contraintes exactes. Méthode de régularisation

Pour résoudre des problèmes incorrectement posés (y compris des problèmes de programmation linéaire), A. Tikhonov a proposé la méthode de régularisation. Dans le présent paragraphe, cette méthode est envisagée dans son application aux problèmes de programmation non linéaire.

La plupart des problèmes réels qui s'écrivent sous la forme de problèmes de programmation mathématique contiennent une information supplémentaire qui permet de choisir une solution stable. Dans de nombreux problèmes de la forme (7.1), il faut rechercher l'élément de l'ensemble G qui satisferait en plus à certaines conditions supplémentaires, à celle, par exemple, qu'il soit le plus proche d'un certain point fixé x^0. Dans les problèmes relatifs aux plannings, où y est un programme optimal, l'élément x^0 définit généralement le programme d'une période précédente ; l'écart par rapport à ce programme peut être dû à des retouches d'organisation et de technologie, entraînant, par conséquent, des dépenses supplémentaires.

On voit donc apparaître une position naturelle du problème : trouver pour $x^0 \in E_n$ donné un tel $y^0 \in G$ que

$$|| y^0 - x^0 ||^2 = \min_{y \in G} || y - x^0 ||^2. \tag{7.10}$$

L'élément y^0 se nomme *solution normale du problème* (7.1), alors que le problème (7.1) lui-même s'appelle *problème de la solution normale.*

La procédure de régularisation de la recherche de la solution normale du problème (7.1) pour le cas particulier où seule la fonction économique est perturbée (on suppose que l'information sur l'ensemble X est exacte), consiste à introduire une fonction régularisatrice

$$N_\alpha(x) = \varphi(x) + \alpha\Omega(x), \quad \alpha > 0, \tag{7.11}$$

où

$$\Omega(x) = || x - x^0 ||^2,$$

et considérer le problème de recherche d'un élément $y_\alpha \in X$ tel que

$$N_\alpha(y_\alpha) = \min_{x \in X} N_\alpha(x). \tag{7.12}$$

7.4. Convergence

Théorème 7.2. *Si la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble fermé X, et l'ensemble G est non vide, alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe $\alpha_0(\delta) \geqslant 0$ tel que pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0]$ on ait*

$$| \varphi(y_\alpha) - \varphi(y) | \leqslant \delta.$$

Si de plus la fonction $\varphi(x)$ et l'ensemble X sont convexes,

$$\lim_{\alpha \to 0} y_\alpha = y^0.$$

Démonstration. 1) Montrons que pour tout $\alpha > 0$, il existe y_α. Soit y^0 un élément fixé de G tel que

$$\Omega(y^0) = \min_{y \in G} \Omega(y).$$

Puisque l'ensemble G est fermé, un tel élément y^0 existe bien. Considérons le voisinage suivant du point x^0 :

$$U = \{x: \Omega(x) \leqslant \Omega(y^0)\}.$$

Comme l'ensemble $U \cap X$ est fermé et borné, il existe un élément y_α tel que

$$N_\alpha(y_\alpha) = \min_{x \in U \cap X} N_\alpha(x).$$

Soit $x \in X \setminus U$. Il vient

$$\Omega(x) > \Omega(y^0)$$

et

$$N_\alpha(x) = \varphi(x) + \alpha\Omega(x) \geqslant \varphi(y^0) + \alpha\Omega(x) > \varphi(y^0) + \alpha\Omega(y^0) = N_\alpha(y^0) \geqslant N_\alpha(y_\alpha)$$

(la dernière inégalité est vraie puisque $y^0 \in U \cap X$).

Ainsi,

$$N_\alpha(y_\alpha) \leqslant N_\alpha(x)$$

pour tout $x \in X$.

2) Etant donné que

$$\varphi(y^0) \leqslant \varphi(y_\alpha) \leqslant \varphi(y_\alpha) + \alpha\Omega(y_\alpha) \leqslant \varphi(y^0) + \alpha\Omega(y^0) \leqslant \varphi(y_\alpha) + \alpha\Omega(y^0),$$

il vient

$$\Omega(y_\alpha) \leqslant \Omega(y^0) \tag{7.13}$$

et

$$\varphi(y^0) \leqslant \varphi(y_\alpha) \leqslant \varphi(y^0) + \alpha\Omega(y^0).$$

En passant dans cette inégalité à la limite pour $\alpha \to 0$, on obtient

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi(y_\alpha) = \varphi(y^0).$$

3) Etant donné $\varphi(x)$ et X convexes, l'ensemble G est convexe lui aussi. En vertu de (7.13), $\{y_\alpha\}$ est un compact. Supposons que $\bar{y}$ soit un point limite arbitraire de $\{y_\alpha\}$:

$$\bar{y} = \lim_{k \to \infty} y_{\alpha_k}.$$

D'après ce qui a été démontré,

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(y_{\alpha_k}) = \varphi(y^0) = \varphi(\bar{y});$$

c'est pourquoi $y \in G$. Alors, (7.13) implique

$$\lim_{k \to \infty} \Omega(y_{\alpha_k}) = \Omega(\bar{y}) \leqslant \Omega(y^0),$$

c'est-à-dire

$$\min_{y \in G} \Omega(y) = \Omega(y^0) = \Omega(\bar{y}).$$

Mais la fonction $\Omega(x)$ fortement convexe sur l'ensemble G convexe et fermé est minimisée en un point unique et, par conséquent, $\bar{y} = y^0$. Ainsi, nous avons démontré que pour $\alpha \to 0$, $\{y_\alpha\}$ possède un point limite unique, c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha \to 0} y_\alpha = y^0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Dans le cas général, il est impossible d'obtenir des estimations *a priori* de la rapidité d'approximation avec laquelle y_α converge vers y^0. Des exemples bien simples montrent que cette rapidité peut être très faible. Ainsi, pour le cas unidimensionnel

$$\min_{x \in E_1} x^{2k} \quad (k \geqslant 1),$$

en adoptant $x^0 \neq 0$ dans $\Omega(x) = (x-x^0)^2$, on obtient que, pour $\alpha \to 0$, y_α tend vers $y^0 = 0$ avec une rapidité $O(\alpha^{1/(2k-1)})$.

Nous allons voir en fin du présent chapitre que cette circonstance peut exercer une influence sensible sur la convergence du processus de régularisation dans les problèmes où la perturbation porte également sur l'ensemble admissible.

Théorème 7.3. *Etant donné un ensemble X convexe et fermé ; une fonction $\varphi(x)$ convexe et continue ; des fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ continues ;*

$$\varphi_\varepsilon(x) \in P_\varepsilon(\varphi) = \{\varphi_\varepsilon(x): \ |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X\};$$

des ensembles G et G_ε non vides ; le problème (7.12) *est correctement posé quel que soit $\alpha > 0$ fixé.*

Démonstration. Soit

$$N_{\alpha\varepsilon}(x) = \varphi_\varepsilon(x)+\alpha\Omega(x).$$

La condition que $G_\varepsilon \neq \varnothing$ et la définition de la fonction $\Omega(x)$ entraînent l'existence de $y_{\alpha\varepsilon}$, solution du problème

$$N_{\alpha\varepsilon}(y_{\alpha\varepsilon}) = \min_{x \in X} N_{\alpha\varepsilon}(x)$$

(cf. point 1 de la démonstration du théorème 7.2).

On voit aisément que les fonctions $N_\alpha(x)$ et $N_{\alpha\varepsilon}(x)$ vérifient les conditions du théorème 7.1 d'où l'on déduit précisément que le problème (7.12) est correct.

Remarque. Si on applique le théorème 7.1 à $N_\alpha(x)$, on a

$$\|y_{\alpha\varepsilon}-y_\alpha\| \leqslant \delta$$

pour tout

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\alpha\delta^2\right].$$

7.5. Méthode de régularisation (cas général)

Dans le paragraphe précédent nous avons examiné la méthode de régularisation des problèmes avec contraintes exactes, lorsque la perturbation ne portait que sur la fonction économique. Dans ce qui suit nous considérerons les problèmes de la forme (7.2), c'est-à-dire le cas général où tout ce qu'on connaît sur le problème (7.1) se réduit à la ε-information, et notamment aux fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ et $f_\varepsilon(x)$ de l'ensemble $P_\varepsilon(\varphi, f)$. Pour obtenir des valeurs approchées de la solution normale de (7.1) on procède de la façon suivante.

En introduisant une fonction paramétrique

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x) = \beta[\varphi_\varepsilon(x)+\alpha\Omega(x)]+\psi_\varepsilon(x),$$

où $\beta > 0$ et

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} [\min\{f_{\varepsilon i}(x), 0\}]^2,$$

on calcule $y_{\alpha\beta\varepsilon} \in \Gamma$ pour résoudre le problème

$$\min_{x \in \Gamma} \Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x);$$

de plus, comme $y_{\alpha\beta\varepsilon}$ on peut prendre une valeur approchée de la solution exacte de minimisation de la fonction $\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x)$.

Attirons l'attention sur le fait que $\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x)$ est une pénalité du problème de minimisation de la fonction régularisatrice

$$N_{\alpha\varepsilon}(x) = \varphi_\varepsilon(x)+\alpha\Omega(x)$$

sur l'ensemble X_ε.

7.6. Convergence de la méthode de régularisation (cas général)

Faisons les hypothèses suivantes :

1) L'ensemble Γ est convexe et fermé ;

2) La fonction $\varphi(x)$ est convexe et continue sur Γ ;

3) Les fonctions $f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ sont concaves et continues sur Γ ;

4) Les fonctions $\varphi_\varepsilon(x)$ et $f_\varepsilon(x)$ continues sur Γ appartiennent à l'ensemble $P_\varepsilon(\varphi, f)$;

5) $G = \left\{ y \in X : \varphi(y) = \min_{x \in X} \varphi(x) \right\} \neq \varnothing$.

Proposition 1. *Quel que soit $x \in X$ l'inégalité*

$$\psi_\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon^2$$

est vraie.

Démonstration. Introduisons les notations

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{m} [\min\{f_i(x), 0\}]^2;$$
$$f_i^-(x) = \min\{f_i(x), 0\};$$
$$f_{\varepsilon i}^-(x) = \min\{f_{\varepsilon i}(x), 0\};$$
$$r_i(x) = f_i^-(x) - f_{\varepsilon i}^-(x).$$

Si $f_i(x) \leqslant 0$ et $f_{\varepsilon i}(x) \leqslant 0$, il vient

$$|r_i(x)| = |f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)|.$$

Si $f_i(x) \leqslant 0$, et $f_{\varepsilon i}(x) > 0$, il vient

$$|r_i(x)| = |f_i(x)| \leqslant |f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)|.$$

Si $f_i(x) > 0$, et $f_{\varepsilon i}(x) \leqslant 0$, il vient

$$|r_i(x)| = |-f_{\varepsilon i}(x)| \leqslant |f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)|.$$

Si $f_i(x) > 0$ et $f_{\varepsilon i}(x) > 0$, il vient

$$|r_i(x)| = 0 \leqslant |f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)|.$$

Ainsi, quel que soit $x \in \Gamma$, on a

$$|f_i^-(x) - f_{\varepsilon i}^-(x)| \leqslant |f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)|.$$

Mais $f_i^-(x) = 0$ pour $x \in X$, donc (cf. condition 4))

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} [f_{\varepsilon i}^-(x)]^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} [f_i(x) - f_{\varepsilon i}(x)]^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Proposition 2. *Quel que soit $x \in \Gamma$ l'inégalité*

$$|\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon\psi_\varepsilon(x)$$

est vraie.

Démonstration. Notons

$$[f^-(x)]^T = (f_1^-(x), \quad f_2^-(x), \ \ldots, f_m^-(x)),$$
$$[f_\varepsilon^-(x)]^T = (f_{\varepsilon 1}^-(x), \quad f_{\varepsilon 2}^-(x), \ \ldots, f_{\varepsilon m}^-(x)).$$

La démonstration de la proposition précédente entraîne l'inégalité

$$\|f^-(x) - f_\varepsilon^-(x)\| \leqslant \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \Gamma.$$

Alors,

$$|\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| = |\,\|f^-(x)\|^2 - \|f_\varepsilon^-(x)\|^2| \leqslant$$
$$\leqslant \|f^-(x) - f_\varepsilon^-(x)\|\,(\|f^-(x) + f_\varepsilon^-(x)\|) \leqslant \varepsilon(\|f^-(x)\| + \|f_\varepsilon^-(x)\|).$$

Compte tenu de l'inégalité $2\|z\| \leqslant 1 + \|z\|^2$ il en résulte:

$$|\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon(\|f^-(x) - f_\varepsilon^-(x)\| + 2\|f_\varepsilon^-(x)\|) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(\varepsilon + 1 + \|f_\varepsilon^-(x)\|^2) = \varepsilon^2 + \varepsilon + \varepsilon\psi_\varepsilon(x).$$

Proposition 3. *Il existe*

$$\Psi^* = \inf_{x \in \Gamma} \Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x) > -\infty.$$

Démonstration. La fonction

$$N_\alpha(x) = \varphi(x) + \alpha\Omega(x), \quad \alpha > 0$$

étant fortement convexe sur Γ, il existe

$$N^{**} = \min_{x \in \Gamma} N_\alpha(x) > -\infty.$$

En tenant compte de l'inégalité (cf. condition 4)

$$\varphi_\varepsilon(x) \geqslant \varphi(x) - \varepsilon,$$

on obtient la relation

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x) \geqslant \beta[\varphi(x) - \varepsilon] + \beta\alpha\Omega(x) = \beta N_\alpha(x) - \beta\varepsilon \geqslant \beta N^{**} - \beta\varepsilon > -\infty,$$

vraie pour tout $x \in \Gamma$, tout $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 < \infty$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < \infty$ et quel que soit $\alpha > 0$ fixé. La proposition 3 est ainsi démontrée.

Toujours comme dans ce qui précède

$$\Omega(y^0) = \min_{y \in G} \Omega(y), \quad y^0 \in G;$$

$$N_\alpha(y_\alpha) = \min_{x \in X} N_\alpha(x) = N^*, \quad y_\alpha \in X.$$

Soit le point $y_{\alpha\beta\varepsilon}$ de Γ tel que

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(y_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \Psi^* + \eta(\varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) > 0, \tag{7.14}$$

et, en outre,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} = 0. \tag{7.15}$$

Théorème 7.4. *Si* $\beta = \beta(\varepsilon) > 0$ *vérifie les conditions*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \beta(\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon^2}{\beta(\varepsilon)} = 0,$$

on a

$$\lim_{\alpha \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} y_{\alpha\beta\varepsilon} = y^0.$$

Démonstration. Les conditions

$$\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0,$$

$$\varphi(x) \leqslant \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon,$$

$$\varphi_\varepsilon(x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon,$$

vraies pour tout $x \in \Gamma$, ainsi que les conditions

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(y_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \Psi^* + \eta(\varepsilon)$$

et

$$\psi_\varepsilon(y_\alpha) \leqslant \varepsilon^2,$$

amènent

$$\begin{aligned} N^{**} \leqslant N_\alpha(y_{\alpha\beta\varepsilon}) &\leqslant N_\alpha(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\psi_\varepsilon(y_{\alpha\beta\varepsilon}) = \\ &= \varphi(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\psi_\varepsilon(y_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \\ &\leqslant \varphi_\varepsilon(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\psi_\varepsilon(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \varepsilon = \\ &= \frac{1}{\beta}\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \varepsilon \leqslant \frac{1}{\beta}[\Psi^* + \eta(\varepsilon)] + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\beta}\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(y_\alpha) + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + \varepsilon = \varphi_\varepsilon(y_\alpha) + \alpha\Omega(y_\alpha) + \\ &+ \frac{1}{\beta}\psi_\varepsilon(y_\alpha) + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + \varepsilon \leqslant \varphi(y_\alpha) + \alpha\Omega(y_\alpha) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon = N^* + \frac{\varepsilon^2}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\varepsilon^2}{\beta} \leqslant$ const et $\frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} \leqslant$ const, la quantité

$$N_\alpha(y_{\alpha\beta\varepsilon}) = \varphi(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(y_{\alpha\beta\varepsilon})$$

est bornée et, puisque la fonction $N_\alpha(x)$ est fortement convexe sur Γ quel que soit $\alpha > 0$, on en déduit que $\{y_{\alpha\beta\varepsilon}\}$ est un compact (cf. 2.13, propriété 2). Supposons que $\bar{y}$ soit un point limite :

$$\bar{y} = \lim_{k\to\infty} y_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}.$$

L'inégalité

$$N^{**} \leqslant N_\alpha(y_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant N_\alpha(y_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\psi_\varepsilon(y_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant N^* + \frac{\varepsilon^2}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon \quad (7.16)$$

entraîne que

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{\varepsilon_k}(y_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) = 0.$$

La proposition 2 donne

$$\psi(\bar{y}) = \lim_{k\to\infty} \psi(y_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) \leqslant \lim_{k\to\infty} [\psi_{\varepsilon_k}(y_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k + \varepsilon_k\psi_{\varepsilon_k}(y_{\alpha\beta_k\varepsilon_k})] = 0,$$

d'où il résulte que $\bar{y} \in X$. En passant à la limite dans (7.16) pour $\varepsilon = \varepsilon_k \to +0$, on obtient

$$N_\alpha(\bar{y}) \leqslant N^* = \min_{x\in X} N_\alpha(x) = N_\alpha(y_\alpha),$$

et donc

$$N_\alpha(\bar{y}) = N_\alpha(y_\alpha).$$

L'unicité du point du minimum de y_α d'une fonction fortement convexe $N_\alpha(x)$ conduit à

$$\bar{y} = y_\alpha.$$

Ainsi, pour $\varepsilon \to 0$, tout point limite du compact $\{y_{\alpha\beta\varepsilon}\}$ est $\bar{y}$ et, donc,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} y_{\alpha\beta\varepsilon} = y_\alpha.$$

Le théorème 7.2 entraîne que

$$\lim_{\alpha \to +0} y_\alpha = y^0,$$

c'est pourquoi

$$\lim_{\alpha \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} y_{\alpha\beta\varepsilon} = y^0.$$

7.7. Choix des paramètres de régularisation

La condition (7.14) permet de déterminer approximativement le point du minimum (s'il existe) de la fonction $\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(x)$. Constatons que si $y_{\alpha\beta\varepsilon}$ est un point du minimum, alors

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(y_{\alpha\beta\varepsilon}) = \Psi^* \quad \text{et} \quad \eta(\varepsilon) = 0.$$

Comme dans des conditions réelles il arrive souvent que la quantité ε est inaméliorable (non diminuable), elle détermine également la précision qu'il n'y a aucun sens de dépasser en minimisant (cf. (7.14), (7.15)). La quantité ε délimite également le choix du paramètre $\beta = \beta(\varepsilon)$. La condition

$$\frac{\varepsilon^2}{\beta(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0$$

traduit l'avantage que présente le choix de $\beta(\varepsilon)$ de même ordre que ε.

En réalisant la régularisation, on tombe sur toutes sortes de difficultés. Examinons l'une d'elles seulement, à savoir le choix de α_0 et β_0, valeurs initiales des paramètres de régularisation. Supposons que ε est suffisamment petit. Puisque la convergence du processus de régularisation peut être très lente (cf. remarque du théorème 7.2), le choix d'une valeur relativement grande de α_0 peut s'avérer très désavantageux du point de vue du temps nécessaire pour obtenir une bonne approximation de la solution normale.

Par ailleurs, la recherche du point $y_{\alpha_0\beta_0\varepsilon}$ fait généralement appel pour minimiser aux méthodes de relaxation ; or, la rapidité avec laquelle convergent ces dernières est sensiblement influencée par le paramètre de la fonction fortement convexe à minimiser $\Psi_{\alpha_0\beta_0\varepsilon}(x)$, c'est-à-dire par la valeur du produit $\alpha_0\beta_0$. Comme on le verra par la suite (cf. chapitre 9), quand $\alpha_0\beta_0$ décroît, la convergence des processus de relaxation devient plus lente. Par suite, le choix de petites valeurs de α_0 et β_0 peut encore augmenter le temps total nécessaire pour approximer une solution normale, et, de plus, peut être injustifié du point de vue de son concordance avec ε.

A titre de conclusion, notons que dans ce chapitre nous avons passé en revue les questions relatives à la stabilité des problèmes de programmation mathématique. Or, la stabilité des méthodes numériques de minimisation par rapport aux erreurs éventuelles dues au calcul est tout aussi importante. Cette question fera l'objet d'étude des chapitres suivants.

CHAPITRE 8

MÉTHODES DE MINIMISATION UNIDIMENSIONNELLE

8.1. Problèmes de minimisation unidimensionnelle. Essais successifs

La minimisation de la fonction d'une variable est en général un élément indispensable de nombreuses méthodes de minimisation des fonctions à plusieurs variables.

A première vue il semble que la minimisation d'une fonction à une variable est un problème assez simple. Probablement, cette vue résulte de la première initiation aux principes de l'analyse mathématique. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ à minimiser sur un segment $[a, b]$ est dérivable, il suffit de trouver les zéros de la dérivée, leur adjoindre les extrémités du segment, dégager de ces points les minimums locaux et, enfin, trouver parmi ces derniers le point du minimum absolu.

Or, pour une grande classe des fonctions ce problème n'est pas si simple. D'abord, comme c'est le cas des situations réelles, il se peut que la résolution de l'équation $\varphi'(x) = 0$ soit très compliquée. D'autre part, dans les problèmes pratiques, on ne sait pas souvent si la fonction $\varphi(x)$ est dérivable.

Il s'ensuit qu'ici l'intérêt des méthodes de minimisation qui n'imposent pas de calcul de la dérivée devient très grand.

La méthode directe la plus grossière dans ce domaine et qui se présente la première à l'esprit est celle des essais successifs.

Supposons que $\varphi(x)$ est telle que sur le segment $[a, b]$ son minimum local x^* est le minimum absolu. On choisit d'une façon suffisamment arbitraire une suite de points $\{x_k\}$ telle que

$$x_k \leqslant x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

par exemple,

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, \ldots, x_0 = a, \quad h = \text{const} > 0,$$

après quoi on cherche successivement les valeurs de $\varphi(x_k)$ jusqu'au moment où l'on obtient

$$\varphi(x_k) < \varphi(x_{k+1}).$$

Il est clair que

$$x_{k-1} \leqslant x^* \leqslant x_{k+1}.$$

Ensuite, on reprend la procédure (le pas h étant déjà plus petit) sur le segment $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. Et ainsi de suite, tant que toutes les prescriptions de précision soient remplies.

8.2. Méthodes à calcul unique de la valeur d'une fonction à chaque itération

Les procédures de calcul donnent souvent lieu à des difficultés importantes dues à la recherche des valeurs des fonctions $\varphi(x)$, par exemple, dans les cas où les valeurs de $\varphi(x)$ sont fournies par telle ou telle expérience, ou si $\varphi(x)$ est donnée analytiquement, mais par une formule plutôt complexe à calculer. Parmi les méthodes qui, tout en limitant le nombre des valeurs de $\varphi(x)$ à calculer, permettent d'obtenir, dans un certain sens, la meilleure précision, il y a les méthodes *de Fibonacci* et *de la section dorée.*

Ces méthodes, qui consistent à construire une suite des segments emboîtés $[a_k, b_k]$ tendant vers le point x^* du minimum de la fonction $\varphi(x)$ sur le segment de départ $[a_0, b_0]$, jouissent des propriétés suivantes.

A. Quel que soit $k = 0, 1, \ldots$, la k-ième approximation x_k du point x^* est l'un des deux points: y_k ou bien z_k, se trouvant à la même distance

$$y_k - a_{k-1} = b_{k-1} - z_k$$

des extrémités correspondantes du segment $[a_{k-1}, b_{k-1}]$. Pour qu'il en soit ainsi il faut observer les relations suivantes

$$y_k = a_{k-1} + c_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}), \tag{8.1}$$

$$z_k = a_{k-1} + (1 - c_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}), \tag{8.2}$$

où le nombre c_{k-1} est choisi tel que

$$0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{8.3}$$

B. A chaque pas (sauf le premier) on calcule une seule valeur de la fonction $\varphi(x)$.

Utilisons les formules (8.1)-(8.3) pour chercher de la façon suivante le segment $[a_k, b_k]$.

Si $\varphi(y_k) \leqslant \varphi(z_k)$, alors $a_{k-1} \leqslant x^* \leqslant z_k$,
donc, choisissons pour $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_k$, $x_k = y_k$. (8.4)

Si $\varphi(y_k) > \varphi(z_k)$, alors $y_k \leqslant x^* \leqslant b_{k-1}$,
donc, choisissons pour $a_k = y_k$, $b_k = b_{k-1}$, $x_k = z_k$. (8.5)

Discussion de la procédure (8.1)-(8.5). Il résulte de (8.1), (8.2) que

$$y_k - a_{k-1} = b_{k-1} - z_k. \tag{8.6}$$

On en tire avec (8.4), (8.5) et (8.1)

$$b_k - a_k = z_k - a_{k-1} = b_{k-1} - y_k = (1 - c_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}). \tag{8.7}$$

En considérant (8.4) et (8.5) on voit que

$$x_k \in [a_k, b_k] \quad \text{et} \quad \varphi(x_k) = \min\{\varphi(y_k), \varphi(z_k)\}.$$

Maintenant, en vertu de la propriété B, exigeons qu'à chaque pas (sauf le premier, lorsqu'il faut calculer deux valeurs), on cherche une seule valeur de la fonction $\varphi(x)$. On obtient la relation

$$x_k = \begin{cases} z_{k+1} & \text{si} \quad \varphi(y_k) \leqslant \varphi(z_k), \\ y_{k+1} & \text{si} \quad \varphi(y_k) > \varphi(z_k). \end{cases} \tag{8.8}$$

Pour respecter les conditions (8.8), il faut choisir convenablement les nombres c_k.

Soit $\varphi(y_k) \leqslant \varphi(z_k)$. Alors (cf. (8.4), (8.1) et (8.7)),

$$x_k = y_k = a_{k-1} + c_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}) = a_k + \frac{c_{k-1}}{1-c_{k-1}}(b_k - a_k).$$

Si

$$1 - c_k = \frac{c_{k-1}}{1-c_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

c'est-à-dire si

$$c_k = \frac{1-2c_{k-1}}{1-c_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.9}$$

on a (cf. (8.2))

$$x_k = z_{k+1}.$$

Si

$$\varphi(y_k) > \varphi(z_k),$$

on a (cf. (8.5), (8.2), (8.1), (8.9))

$$\begin{aligned} x_k = z_k &= a_{k-1} + (1-c_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}) = \\ &= a_{k-1} + c_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}) + (1-2c_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}) = \\ &= y_k + (1-2c_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}) = a_k + \frac{1-2c_{k-1}}{1-c_{k-1}} \times \\ &\times (b_k - a_k) = a_k + c_k(b_k - a_k) = y_{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, les relations (8.9) assurent la validité de la condition (8.8).

(8.9) donne

$$c_k = \frac{-1+3c_{k-2}}{c_{k-2}}, \tag{8.10}$$

et, ensuite, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$c_k = \frac{F_i - F_{i+2}c_{k-i}}{F_{i-2} - F_i c_{k-i}}, \quad k = 3, 4, \ldots, \; i = 3, 4, \ldots, k, \tag{8.11}$$

où

$$F_j = F_{j-1} + F_{j-2}, \quad j = 3, 4, \ldots \tag{8.12}$$

Les nombres F_j qui vérifient la relation (8.12) et la condition $F_1 = F_2 = 1$ sont dits *nombres de Fibonacci.*

Voici quelques-uns parmi les premiers de ces nombres :

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13,$$
$$F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55, \quad F_{11} = 89, \quad F_{12} = 144, \quad \text{etc.}$$

8.3. Méthode de Fibonacci

Pour choisir les nombres c_k guidons-nous sur les considérations suivantes : le nombre de pas n étant donné à l'avance (c'est-à-dire $k = 1, 2, \ldots, n$), prenons les nombres c_k tels que la longueur du segment $[a_n, b_n]$ soit la plus petite possible.

Etant donné que (8.7) entraîne

$$b_n - a_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1-c_j)(b_0 - a_0), \tag{8.13}$$

on a le problème

$$\min_{c_j} \prod_{j=0}^{n-1} (1-c_j) \tag{8.14}$$

sous les conditions

$$0 \leqslant c_j \leqslant \frac{1}{2}, \tag{8.3}$$

$$1-c_1 = \frac{c_0}{1-c_0}, \tag{8.15}$$

$$1-c_2 = \frac{1-2c_0}{c_0}, \tag{8.16}$$

$$1-c_j = -\frac{F_{j-1} - F_{j+1}c_0}{F_{j-2} - F_j c_0}, \tag{8.17}$$
$$j = 3, 4, \ldots, n-1.$$

Les conditions (8.15)-(8.17) se déduisent avec évidence de (8.9)-(8.11). (8.14), (8.15), (8.16) et (8.17) amènent

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1-c_j) = (1-c_0)\frac{c_0}{1-c_0} \cdot \frac{1-2c_0}{c_0} \frac{F_2 - F_4 c_0}{F_1 - F_3 c_0} \cdots$$
$$\cdots \frac{F_{n-3} - F_{n-1}c_0}{F_{n-4} - F_{n-2}c_0} \cdot \frac{F_{n-2} - F_n c_0}{F_{n-3} - F_{n-1}c_0} (-1)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1-c_j) = \begin{cases} F_{n-2} - F_n c_0, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -F_{n-2} + F_n c_0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{8.18}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on vérifie sans peine que la con-

dition $0 \leqslant c_k \leqslant 1/2$, $k = 0, 1, \ldots$, et la relation

$$c_k = \frac{F_k - F_{k+2}c_0}{F_{k-2} - F_k c_0},$$
$$k = 3, 4, \ldots, n,$$

conduisent, pour $k \geqslant 3$, à

$$\frac{F_k}{F_{k+2}} \leqslant c_{n-k} \leqslant \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}, \quad \text{si } k \text{ est pair},$$
$$\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}} \leqslant c_{n-k} \leqslant \frac{F_k}{F_{k+1}}, \quad \text{si } k \text{ est impair}$$

et à $0 \leqslant c_{n-1} \leqslant 1/2$, $1/3 \leqslant c_{n-2} \leqslant 1/2$.

Le problème (8.14), (8.3), (8.15)-(8.17) se ramène alors à deux problèmes suivants.

Si n est impair, on a pour $n \geqslant 3$

$$\min_{c_0} (F_{n-2} - F_n c_0),$$
$$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} \leqslant c_0 \leqslant \frac{F_n}{F_{n+2}},$$

d'où

$$c_0 = \frac{F_n}{F_{n+2}}. \tag{8.19}$$

Si n est pair, on a pour $n \geqslant 4$

$$\min_{c_0} (F_n c_0 - F_{n-2}),$$
$$\frac{F_n}{F_{n+2}} \leqslant c_0 \leqslant \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}},$$

d'où

$$c_0 = \frac{F_n}{F_{n+2}}$$

et, de plus, pour $n = 1$, $c_0 = 1/2$; pour $n = 2$, $c_0 = 1/3$.

Minimisons enfin la grandeur

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 - c_j).$$

A cet effet, appliquons la relation connue (démontrée aussi par récurrence) :

$$F_n^2 - F_{n-2}F_{n+2} = (-1)^n.$$

Alors, d'après (8.18) et (8.19), on a

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 - c_j) = \frac{1}{F_{n+2}}.$$

Ainsi,

$$b_n - a_n = \frac{1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0). \tag{8.20}$$

Cette relation permet de choisir le nombre n pour la précision $\varepsilon > 0$ donnée du point x^*.

Comme

$$|x^* - x_n| \leqslant b_n - a_n,$$

la valeur de n doit assurer l'observation des inégalités

$$b_n - a_n \leqslant \varepsilon < b_{n-1} - a_{n-1}$$

ou

$$\frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} \leqslant \varepsilon < \frac{b_0 - a_0}{F_{n+1}}.$$

Les raisonnements ci-dessus peuvent être résumés sous la forme du théorème suivant sur la méthode optimale de Fibonacci (cf. (8.1), (8.2), (8.9), (8.19), ainsi que les propriétés A et B).

Théorème 8.1. *Parmi toutes les méthodes qui jouissent des propriétés* A *et* B, *la méthode de Fibonacci, le nombre n de pas étant donné, réduit au minimum la longueur du segment* $[a_n, b_n]$ *contenant le point* x^*.

8.4. Algorithmes de la méthode de Fibonacci

Algorithme 1. 1) Choisir comme n le nombre naturel minimal vérifiant les inégalités

$$F_{n+1} < \frac{1}{\varepsilon}(b_0 - a_0) \leqslant F_{n+2}.$$

2) 1-er pas.

$$y_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

$$z_1 = a_0 + b_0 - y_1;$$

calculer $\varphi(y_1)$ et $\varphi(z_1)$.

Poser

$$a_1 = \begin{cases} a_0, & \text{si} \quad \varphi(y_1) \leqslant \varphi(z_1), \\ y_1, & \text{si} \quad \varphi(y_1) > \varphi(z_1), \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} z_1, & \text{si} \quad \varphi(y_1) \leqslant \varphi(z_1), \\ b_0, & \text{si} \quad \varphi(y_1) > \varphi(z_1). \end{cases}$$

3) k-ième pas ($2 \leqslant k \leqslant n$). Supposons connus

$$a_{k-1}, \quad b_{k-1}, \quad \varphi(y_{k-1}), \quad \varphi(z_{k-1}).$$

Si $\varphi(y_{k-1}) \leqslant \varphi(z_{k-1})$, calculer

$$y_k = a_{k-1} + b_{k-1} - y_{k-1} \quad \text{et} \quad \varphi(y_k)$$

et poser

$$z_k = y_{k-1}, \quad \varphi(z_k) = \varphi(y_{k-1}).$$

Si $\varphi(y_{k-1}) > \varphi(z_{k-1})$, poser

$$y_k = z_{k-1}, \quad \varphi(y_k) = \varphi(z_{k-1})$$

et calculer

$$z_k = a_{k-1}+b_{k-1}-z_{k-1} \quad \text{et} \quad \varphi(z_k).$$

Poser

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{si} \quad \varphi(y_k) \leqslant \varphi(z_k), \\ y_k, & \text{si} \quad \varphi(y_k) > \varphi(z_k), \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} z_k, & \text{si} \quad \varphi(y_k) \leqslant \varphi(z_k), \\ b_{k-1}, & \text{si} \quad \varphi(y_k) > \varphi(z_k). \end{cases}$$

Pour réaliser les méthodes numériques de minimisation unidimensionnelle, tous les calculs se font avec une précision limitée par les moyens que présente un ordinateur. Des expériences numériques ont montré que le résultat définitif des calculs d'après l'algorithme considéré est sensiblement influencé par la représentation des nombres de Fibonacci dans la mémoire de la machine. Il s'est avéré que l'accumulation des erreurs dans le calcul de y_k et z_k peut être si rapide que la précision attendue de la solution sera fort différente de la précision réelle.

Il existe des algorithmes de la méthode de Fibonacci exempts de cet inconvénient. Voici l'un d'entre eux.

A l g o r i t h m e 2. 1) Choisir le nombre n de même que dans l'algorithme 1.

2) 1-er pas.

$$y_1 = a_0+\frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0-a_0),$$

$$z_1 = a_0+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0-a_0).$$

Calculer $\varphi(y_1)$ et $\varphi(z_1)$.

Choisir les nombres a_1, b_1 de même que dans l'algorithme 1.

3) k-ième pas ($2 \leqslant k \leqslant n$). Supposons connus

$$a_{k-1}, \quad b_{k-1}, \quad \varphi(y_{k-1}), \quad \varphi(z_{k-1}).$$

Si $\varphi(y_{k-1}) \leqslant \varphi(z_{k-1})$, calculer $y_k = a_{k-1}+\frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0-a_0)$ et $\varphi(y_k)$ et poser

$$z_k = y_{k-1}, \quad \varphi(z_k) = \varphi(y_{k-1}).$$

Si $\varphi(y_{k-1}) > \varphi(z_{k-1})$, poser

$$y_k = z_{k-1}, \quad \varphi(y_k) = \varphi(z_{k-1})$$

et calculer

$$z_k = a_{k-1} + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \quad \text{et} \quad \varphi(z_k).$$

Choisir les nombres a_k, b_k de même que dans l'algorithme 2.

8.5. Méthode de la section dorée

Dans de nombreux cas le choix de n doit se faire *a priori*, ce qui conduit à certaines difficultés. Il en est ainsi, par exemple, lorsque le nombre d'opérations nécessaires pour calculer les valeurs de $\varphi(x)$ n'est pas limité, et comme critère d'arrêt de la procédure on utilise non pas la précision garantie de la définition de x^* (c'est-à-dire de la longueur du segment $[a_n, b_n]$), mais, disons, la précision du calcul de la valeur de $\varphi(x^*)$. Il faut donc construire une méthode qui, sans imposer au départ la définition du nombre n, comme c'est le cas de la méthode de Fibonacci, assure pourtant une précision (quant à la longueur du segment $[a_n, b_n]$) peu inférieure à la précision de cette méthode. Une telle méthode est dite *de la section dorée*; elle présente encore cet avantage que son algorithme cadre avec celui de la méthode de Fibonacci. De plus, elle n'impose pas de première étape qui consiste à définir le nombre n et la grandeur $\frac{F_n}{F_{n+2}}$.

Soit $c_k = \text{const}$, $k = 0, 1, \ldots$

(8.9) entraîne alors

$$1 - c = \frac{c}{1-c},$$

d'où

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Et comme $0 \leqslant c \leqslant 1/2$, il vient

$$c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sim 0{,}3819. \tag{8.21}$$

Il est évident que l'algorithme de la méthode devient ainsi plus simple par rapport à l'algorithme précédent.

Explicitons la dénomination de la méthode. On sait que si

$$\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{b_{k-1} - y_k} = \frac{b_{k-1} - y_k}{y_k - a_{k-1}},$$

le point y_k réalise la section dorée du segment $[a_{k-1}, b_{k-1}]$. La validité de cette relation est rendue évidente par (8.7) et la condition

$$1 - c = \frac{c}{1-c}.$$

Enfin, comparons la précision des méthodes de Fibonacci et de la section dorée.

Il résulte de (8.13) et (8.21) que

$$b_n - a_n = (1-c)^n (b_0 - a_0) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b_0 - a_0).$$

La formule de Binet*)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

implique que pour de grands n

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Il vient

$$\frac{[b_n - a_n]_{\text{s.d.}}}{[b_n - a_n]_{\text{Fib.}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b_0 - a_0)}{\frac{1}{F_{n+2}} (b_0 - a_0)} = \frac{F_{n+2}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \sim 1{,}1708.$$

Ainsi, le segment $[a_n, b_n]_{\text{s.d.}}$ construit par la méthode de la section dorée est de 17 % plus long que le segment $[a_n, b_n]_{\text{Fib.}}$ construit par la méthode de Fibonacci.

Notons que pour des n suffisamment grands on a

$$\frac{F_n}{F_{n+2}} \sim \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = c,$$

ce qui veut dire que pour de grands n la méthode de Fibonacci de même que la méthode de la section dorée démarrent pratiquement du même point c_0.

Constatons que

$$\frac{F_5}{F_7} \sim 0{,}38, \quad \frac{F_6}{F_8} \sim 0{,}381, \quad \text{etc.},$$

et de ce fait on peut quelquefois combiner les deux méthodes, réalisant les premiers pas suivant la méthode de la section dorée et poursuivant, lorsque l'optimum est déjà suffisamment proche, en fixant le nombre n et en passant à la méthode de Fibonacci.

8.6. Méthode de ~~Newton~~ tangentes

Cette méthode peut être très efficace pour la minimisation des fonctions convexes.

---

*) Sa démonstration élémentaire est donnée dans [3].

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ est convexe et continûment dérivable sur le segment $[a, b]$. Désignons par $\varphi_l(x, y)$ la fonction suivante linéaire par rapport à x définie en y :

$$\varphi_l(x, y) = \varphi(y)+\varphi'(y)(x-y).$$

Voici en quoi consiste la méthode. On choisit un point arbitraire $x_0 \in [a, b]$ pour construire la fonction $\varphi_l(x, x_0)$. Le calcul du point x_1 se fait en résolvant le problème suivant

$$\min \xi$$

sous les conditions

$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_0),$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Notons ξ_1, x_1 la solution de ce problème. Pour rechercher le point x_2, on construit la fonction $\varphi_l(x, x_1)$ et on calcule ξ_2, x_2, qui donnent la solution du problème

$$\min \xi$$

sous les conditions

$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_0),$$
$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_1),$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Supposons que les points $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient calculés. Pour trouver x_k on résout le problème

$$\min \xi$$

sous les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \xi \geqslant \varphi_l(x, x_0), \\ \xi \geqslant \varphi_l(x, x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi \geqslant \varphi_l(x, x_{k-1}), \\ a \leqslant x \leqslant b. \end{array}\right\} \tag{8.22}$$

Soit

$$\psi_{k-1}(x) = \max\{\varphi_l(x, x_0), \varphi_l(x, x_1), \ldots, \varphi_l(x, x_{k-1})\}, \tag{8.23}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\psi_{k-1}(x) = \max\{\psi_{k-2}(x), \varphi_l(x, x_{k-1})\}. \tag{8.24}$$

On voit aisément *) que pour $\varphi'(x_{k-1}) \neq 0$, le problème (8.22) est équiva-

*) Si le lecteur trouve ceci difficile, la démonstration d'une proposition analogue est donnée au chapitre 10, paragraphe 10.3, point IV, démonstration du théorème 10.7.

lent au problème de la recherche d'un point $x_k \in [a, b]$ tel que

$$\psi_{k-1}(x_k) = \min_{x \in [a, b]} \psi_{k-1}(x). \tag{8.25}$$

La figure 8.1 montre que pour calculer chaque point x_k il suffit de trouver à chaque itération deux nouveaux sommets de la ligne polygonale $\psi_{k-1}(x)$ (sur la figure, la ligne polygonale ACB représente le graphique de la fonction

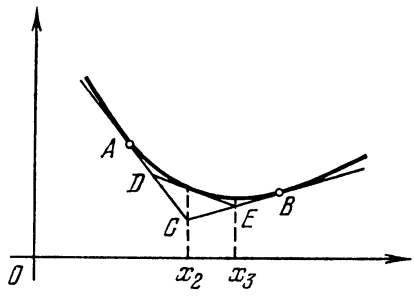

Fig. 8.1

$\psi_1(x)$, alors que la ligne polygonale $ADEB$ représente le graphique de la fonction $\psi_2(x)$).

Examinons certaines propriétés de la fonction $\psi_{k-1}(x)$. Par suite de la convexité de la fonction $\varphi(x)$ (cf. (2.18)), on a

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(y) + \varphi'(y)(x-y),$$

d'où

$$\varphi_l(x, x_i) \leqslant \varphi(x)$$

pour tout $i = 0, 1, \ldots, k-1$ et quel que soit $x \in [a, b]$. Il en résulte que

$$\varphi(x) \geqslant \max \{\varphi_l(x, x_0), \quad \varphi_l(x, x_1), \ldots, \varphi_l(x, x_{k-1})\}$$

et donc en vertu de (8.23), tout $x \in [a, b]$ vérifie l'inégalité

$$\psi_{k-1}(x) \leqslant \varphi(x). \tag{8.26}$$

On en déduit avec la définition de la fonction $\varphi_l(x, y)$ et la relation (8.23) que

$$\varphi(x_i) = \varphi_l(x_i, x_i) \leqslant \psi_{k-1}(x_i) \leqslant \varphi(x_i),$$

c'est-à-dire

$$\psi_{k-1}(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{8.27}$$

La convergence de la méthode est justifiée dans l'hypothèse que $\varphi'(x_k) \neq \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, puisque dans le cas contraire, x_k est un point du minimum et le processus s'arrête sur ce pas.

Théorème 8.2. *Pour une fonction $\varphi(x)$ convexe et continûment dé-*

rivable sur le segment $[a, b]$, *la méthode de Newton converge :*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k(x_{k+1}) = \varphi(x^*) = \min_{x \in [a, b]} \varphi(x).$$

Si le point du minimum x^* *est unique, on a*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*.$$

Démonstration. (8.25), (8.24) et (8.26) conduisent à

$$\psi_{k-1}(x_k) = \min_{x \in [a, b]} \psi_{k-1}(x) \leqslant \psi_{k-1}(x_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \psi_k(x_{k+1}) = \min_{x \in [a\ b]} \psi_k(x) \leqslant \psi_k(x^*) \leqslant \varphi(x^*).$$

Ainsi $\{\psi_k(x_{k+1})\}$ est une suite croissante monotone et bornée supérieurement; il existe donc

$$\psi^* = \lim_{k \to \infty} \psi_k(x_{k+1}).$$

L'inégalité (8.26) entraîne que

$$\psi^* \leqslant \varphi(x^*). \tag{8.28}$$

Montrons que $\psi^* = \varphi(x^*)$. Soit

$$L = \max_{x \in [ab]} |\varphi'(x)|.$$

Constatons qu'on a, en vertu de la convexité de $\varphi(x)$,

$$L = \max \{|\varphi'(a)|, \quad |\varphi'(b)|\}$$

et la ligne polygonale $\psi_k(x)$ vérifie la condition de Lipschitz sur le segment $[a, b]$ à constante de Lipschitz L.

Etant donné que $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots$, il existe une sous-suite convergente $\{x_{k_i}\}$:

$$\bar{x} = \lim_{i \to \infty} x_{k_i}.$$

Du fait que

$$\psi_{k_i-1}(x_{k_i}) = \min_{x \in [a, b]} \psi_{k_i-1}(x) \leqslant \psi_{k_i-1}(x_{k_{i-1}}),$$

et en vertu de la condition de Lipschitz, on obtient pour la fonction $\psi_{k_i-1}(x)$

$$0 \leqslant \psi_{k_i-1}(x_{k_{i-1}}) - \psi_{k_i-1}(x_{k_i}) \leqslant L\,|\,x_{k_{i-1}} - x_{k_i}\,|.$$

On peut considérer que les indices $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$; alors, $k_{i-1} \leqslant k_i - 1$, et donc (cf. (8.27))

$$\psi_{k_i-1}(x_{k_{i-1}}) = \varphi(x_{k_{i-1}}).$$

Par suite

$$0 \leqslant \varphi(x_{k_{i-1}}) - \psi_{k_i-1}(x_{k_i}) \leqslant L\,||\,x_{k_{i-1}} - x_{k_i}\,||.$$

En passant à la limite pour $i \to \infty$ on aboutit à l'inégalité

$$0 \leqslant \varphi(\bar{x}) - \psi^* \leqslant 0,$$

d'où l'on tire précisément $\psi(\bar{x}) = \psi^*$. Mais $\varphi(x^*) \leqslant \varphi(\bar{x})$, et c'est pourquoi $\varphi(x^*) \leqslant \psi^*$. De la sorte, on a, en vertu de l'inégalité (8.28),

$$\psi^* = \varphi(x^*).$$

La première partie du théorème est démontrée. Sa deuxième affirmation est une conséquence évidente du fait que tout point limite $\bar{x}$ de la suite $\{x_k\}$ est tel que

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x^*) = \min_{x \in [a, b]} \varphi(x).$$

Remarque. La méthode de Newton peut être appliquée également à la minimisation unidimensionnelle des fonctions convexes exemptes des contraintes de dérivabilité continue. Puisque, comme nous l'avons vu (cf. théorème 2.10), une fonction convexe $\varphi(x)$ possède en chaque point intérieur y du segment $[a, b]$ une dérivée à gauche $\varphi'(y-0)$ et une dérivée à droite $\varphi'(y+0)$, la méthode de Newton peut être adaptée à ce cas-là également de la façon suivante. A titre de fonction linéaire $\varphi_l(x, x_i)$ on choisit la fonction

$$\varphi_l(x, x_i) = \varphi(x_i) + \gamma_i(x - x_i),$$

où γ_i est un nombre quelconque du segment $[\varphi'(x_i-0), \varphi'(x_i+0)]$. En particulier, γ_i peut être choisi de façon que

$$|\gamma_i| = \min\{|\varphi'(x_i-0)|, \ |\varphi'(x_i+0)|\}.$$

Pour ce qui reste à faire, la construction de la méthode est toujours la même. Le théorème de la convergence est vrai pour ce cas-là aussi.

Algorithme de la méthode. Chercher le point du minimum de la fonction convexe et dérivable $\varphi(x)$ sur le segment $[a, b]$ avec une précision ε donnée à l'avance.

1-er pas (non standard). Poser

$$a_1 = a, \ b_1 = b, \ \varphi'(a_1) = \varphi'(a), \quad \varphi'(b_1) = \varphi'(b).$$

k-ième pas ($k \geqslant 1$). Si

$$\frac{1}{2}(b_k - a_k) \leqslant \varepsilon,$$

la précision est atteinte et la procédure s'arrête. Si

$$\frac{1}{2}(b_k - a_k) > \varepsilon,$$

calculer l'abscisse x_k du point d'intersection des droites

$$y = \varphi(a_k) + \varphi'(a_k)(x - a_k)$$

et

$$y = \varphi(b_k)+\varphi'(b_k)(x-b_k).$$

Calculer ensuite $\varphi'(x_k)$. Si $\varphi'(x_k) = 0$, le minimum est atteint (et la procédure s'arrête). Si $\varphi'(x_k) < 0$, poser

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k.$$

Si $\varphi'(x_k) > 0$, poser

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k,$$

et le k-ième pas s'achève.

CHAPITRE 9

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'EXTRÉMUM À L'AIDE DES MÉTHODES DE RELAXATION. MÉTHODES DE MINIMISATION SANS CONTRAINTE

9.1. Questions de convergence

Avant d'aborder la résolution d'un problème concret de recherche de l'extrémum, il faut choisir la méthode de minimisation qui convient le mieux dans le cas considéré. A cet effet il faut savoir comparer les méthodes. Une des voies consiste à les comparer sur la base de l'expérience et à partir d'un nombre suffisant de tâtonnements empiriques, dont n'évite aucun spécialiste qui recourt aux techniques de calcul modernes pour résoudre des problèmes pratiques. Une autre voie, sans rejeter la première, consiste à comparer la qualité des méthodes appliquées à certaines classes de problèmes. Or, en procédant de cette façon, on découvre tout de suite le rôle important des caractéristiques *a priori* des méthodes. Ces caractéristiques doivent rendre compte de nombreux facteurs et, entre autres, du volume important des calculs, de la rapidité avec laquelle ils convergent, de la stabilité des méthodes par rapport aux erreurs, du temps nécessaire pour réaliser le calcul, etc. La conception d'une caractéristique exhaustive n'est pas encore à l'ordre du jour mais il est clair que parmi ses composantes présentant un grand intérêt il y a la question de la convergence. Notons que dans notre ouvrage nous entendons toujours la « rapidité de convergence » dans le sens classique, c'est-à-dire comme la comparaison de l'écart entre la m-ième approximation et la solution exacte avec une certaine fonction du nombre m. Supposons que pour une certaine classe des problèmes la convergence de la méthode A est plus rapide que dans le cas de la méthode B. Pour établir que ce fait concerne également notre problème d'extrémum, il faut se rendre compte si ce problème appartient à la classe correspondante. Mais dans des situations réelles cette tâche n'est pas bien simple non plus. Les problèmes d'extrémum ont au fond pour tâche de comprendre le principe même de tel ou tel phénomène et d'adopter dans un certain sens la meilleure décision pour contrôler le phénomène lui-même. Or, en général, l'information sur le phénomène étudié est incomplète ; par conséquent, la connaissance des grandeurs initiales disponibles pour la résolution d'un problème d'extrémum est incomplète elle aussi. Pourtant, quoi qu'il en soit, la position même du problème nous fournit quelques informations par suite de la connaissance de l'aspect « physique » du phénomène étudié et des renseignements correspondants sur les estimations de la précision des données d'entrée. D'autre part, dans la marche de la résolution, nos ren-

seignements ne cessent de se compléter en clarifiant ainsi l'appartenance du problème à une certaine classe. Il s'ensuit que l'information en s'accumulant et les caractéristiques *a priori* permettent d'apprécier à temps une méthode appliquée à la résolution d'un problème concret et, donc, d'apporter des éléments de contrôle à la recherche de la solution.

Notons que généralement on ne parvient à évaluer la rapidité de convergence que pour des classes définies des fonctions à minimiser, par exemple, pour les fonctions lisses et convexes. Mais les estimations sont déjà porteuses d'une information importante sur les méthodes et sont un guide précieux pour réaliser la vérification empirique de leur application à d'autres classes des fonctions.

Dans ce qui suit nous traitons de diverses méthodes de relaxation appliquées aux problèmes d'extrémum, tout en étudiant la rapidité de leur convergence et leur stabilité pour des fonctions convexes et suffisamment lisses, en général de la classe $C^{1,1}(X)$, dont les gradients satisfont à la condition de Lipschitz.

Expliquons quel est le sens que nous prêtons ici à la stabilité des méthodes de minimisation. Disons que les erreurs de calcul sont *admissibles* si elles ne dépassent pas un certain nombre ε. S'il existe dans une méthode des estimations qui définissent l'ordre de convergence, par exemple, des estimations qui comparent l'écart entre la m-ième approximation et la solution exacte avec la grandeur $O\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)$ (ici le nombre α définit l'ordre de la convergence), disons que la méthode est *stable* s'il existe un ε tel que les erreurs admissibles ne changent pas l'ordre de convergence. Dans le cas où la convergence d'une méthode est un fait établi, mais on ne dispose pas d'estimations de sa rapidité, on dira que la méthode est stable si les erreurs de calcul admissibles ne perturbent pas la convergence de la minimisation.

9.2. Notion de relaxation. Lemmes

On considère le problème de minimisation d'une fonction convexe dérivable $\varphi(x)$ sur un ensemble convexe fermé X :

$$\min_{x \in X} \varphi(x).$$

Le processus de construction d'une suite des points $\{x_k\}$ s'appelle *relaxation* si

$$x_k \in X \quad \text{et} \quad \varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que l'ensemble

$$X^* = \left\{ x^* \in X : \ \varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x) \right\}$$

est non vide.

Supposons également, en déduisant les estimations de la rapidité de convergence de la relaxation, que

$$x_k \notin X^*,$$

car s'il n'en est pas ainsi

$$\varphi(x_k) = \min_{x \in X} \varphi(x),$$

et le processus de relaxation s'arrête.

Les estimations de la convergence de toutes les méthodes examinées ci-dessous s'appuient sur trois lemmes.

L e m m e 9.1. *Si une suite numérique* $\{\mu_k\}$ *est telle que*

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geqslant \tau_k \mu_k^2, \quad \mu_k > 0, \quad \tau_k \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)^*),$$

on a

$$\mu_m \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

D é m o n s t r a t i o n. Les conditions du lemme entraînent que

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \geqslant 1 + \tau_k \frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}} \geqslant 1.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\mu_{k+1}} - \frac{1}{\mu_k} = \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_k \mu_{k+1}} \geqslant \tau_k \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \geqslant \tau_k.$$

En sommant cette inégalité par rapport à k, on obtient

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\mu_{k+1}} - \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_0} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k,$$

d'où l'estimation recherchée.

L e m m e 9.2. *Si une suite numérique* $\{\mu_k\}$ *est telle que*

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geqslant \tau_k \mu_k, \quad \mu_k > 0, \quad \tau_k \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

on a

$$\mu_m \leqslant \mu_0 \exp\left[-\sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right] \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

D é m o n s t r a t i o n. Elle est immédiate d'après la condition $\mu_k > 0$, puisque $0 < 1 - \tau_k < 1$, et donc,

$$\mu_m \leqslant (1 - \tau_{m-1})\, \mu_{m-1} \leqslant \mu_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 - \tau_k) = \mu_0 \exp\left[\sum_{k=0}^{m-1} \ln(1 - \tau_k)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 \exp\left[-\sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right].$$

*) μ_k^2 signifie ici le carré du nombre μ_k.

Lemme 9.3. Si $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$, *c'est-à-dire s'il existe une constante* $L > 0$ *telle que, quels que soient* $x, y \in X$, *on ait l'inégalité*

$$\|\varphi'(x)-\varphi'(y)\| \leqslant L\|x-y\|,$$

alors, quels que soient $x, y \in X$, *on a*

$$\varphi(x)-\varphi(y) \geqslant \langle \varphi'(x), \quad x-y\rangle - \frac{L}{2}\|x-y\|^2.$$

Démonstration. En utilisant la condition $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$ et l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(x)-\varphi(y) &= \int_0^1 \langle \varphi'(y+\tau(x-y)),\ x-y\rangle\, d\tau = \\
&= \langle \varphi'(x), x-y\rangle + \int_0^1 \langle \varphi'(y+\tau(x-y))-\varphi'(x),\ x-y\rangle\, d\tau \geqslant \\
&\geqslant \langle \varphi'(x),\ x-y\rangle - \int_0^1 \|\varphi'(y+\tau(x-y))-\varphi'(x)\|\,\|x-y\|\, d\tau \geqslant \\
&\geqslant \langle \varphi'(x),\ x-y\rangle - L\|x-y\|^2 \int_0^1 (1-\tau)\, d\tau = \\
&= \langle \varphi'(x),\ x-y\rangle - \frac{L}{2}\|x-y\|^2.
\end{aligned}$$

9.3. Théorèmes des estimations

Introduisons la notation

$$\mu_k \overset{\text{def}}{=} \varphi(x_k)-\varphi(x^*).$$

La convexité de la fonction $\varphi(x)$ entraîne la relation

$$0 < \mu_k \leqslant \langle \varphi'(x_k), \quad x_k - x^*\rangle, \tag{9.1}$$

vraie pour tout x_k en vertu de l'hypothèse

$$\varphi(x_k) \neq \varphi(x^*).$$

A la base des études données plus loin sur la convergence des méthodes de minimisation par relaxation, il y a le théorème élémentaire d'estimation suivant.

Théorème 9.1. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe et dérivable sur un ensemble convexe et fermé* X ;

2) X^* *un ensemble non vide* ;

3) $\{x_k\}$ *une suite relaxative, alors on a l'estimation*

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1+\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{(\varphi'(x_k),\ x_k-x^*)^2}\right]^{-1} \tag{9.2}$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. Puisque (cf. (9.1))

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) =$$

$$= \frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - x^*\rangle^2} \langle \varphi'(x_k), x_k - x^*\rangle^2 \geqslant \frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - x^*\rangle^2} \mu_k^2,$$

en appliquant à cette relation le lemme (9.1) on aboutit à l'estimation (9.2). Il est évident que si pour $m \to \infty$ la série du second membre de l'inégalité (9.2) est divergente, alors on est en présence d'une convergence faible (c'est-à-dire $\varphi(x_m) \to \varphi(x^*)$ est une convergence par rapport à la fonctionnelle) de relaxation. Par contre, la convexité forte de la fonction $\varphi(x)$ garantit dans ce cas (cf. (2.24)) la convergence forte de la procédure (c'est-à-dire la convergence de la suite $\{x_k\}$ vers la solution x^*). Ainsi, pour explorer la convergence de la relaxation à l'aide de la formule (9.2), il faut savoir minorer la grandeur

$$\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - x^*\rangle^2}.$$

Remarquons que

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - x^*\rangle \to 0 \quad \text{pour} \quad \varphi(x_k) \to \varphi(x^*).$$

Pour certaines classes des méthodes de relaxation cette circonstance permet de trouver la quantité $C > 0$ indépendante du nombre d'itérations k, telle que

$$\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - x^*\rangle^2} \geqslant C,$$

et, par conséquent, obtenir les estimations de la forme $\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \asymp O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Considérons maintenant le problème du minimum libre (sans contrainte) d'une fonction $\varphi(x)$, c'est-à-dire le cas où $X = E_n$.

La fonction $\varphi(x)$ est comme précédemment convexe et dérivable. Il est évident que pour les problèmes de minimisation sans contrainte la condition $x_k \in X$ devient inutile pour la construction de la suite relaxative.

Théorème 9.2. *Si*

1) $X = E_n$;

2) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe et dérivable ;*

3) $X_0 = \{x: \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ *est un ensemble borné :* diam $X_0 = \eta(x_0) = \eta < \infty$;

4) $\{x_k\}$ *est une suite relaxative, alors on a l'inégalité*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\|\varphi'(x_k)\|^2}\right]^{-1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots), \tag{9.3}$$

où $\mu_0 = \varphi(x_0) - \varphi(x^*)$.

Démonstration. Elle est immédiate d'après l'estimation (9.2),

puisque

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - x^* \rangle^2 \leqslant \eta^2 \, \| \varphi'(x_k) \|^2.$$

Remarque. S'il existe un indice m_0 tel que $\varphi(x_{m_0}) > \varphi(x_{m_0+1})$, alors (9.3) amène l'inégalité

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \eta^2 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \right]^{-1}$$

$$(m = m_0 + 1, \quad m_0 + 2, \ldots). \tag{9.4}$$

Théorème 9.3. *Si $X = E_n$, $\varphi(x)$ est une fonction fortement convexe et dérivable et $\{x_k\}$ une suite relaxative, on a les inégalités*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp \left[-\varrho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \right] \tag{9.5}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\| x^m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp \left[-\varrho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \right] \tag{9.6}$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

où ϱ est le paramètre de convexité forte.

Démonstration. Elle est immédiate d'après les propriétés de la convexité forte (cf. (2.26)) :

$$\mu_k \leqslant \frac{1}{\varrho} \| \varphi'(x_k) \|^2$$

et (cf. (2.24))

$$\| x_k - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} [\varphi(x_k) - \varphi(x^*)],$$

ainsi que d'après le lemme 9.2 :

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \| \varphi'(x_k) \|^2 \geqslant \varrho \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \mu_k.$$

Au cours des calculs, les estimations (9.4)-(9.6) permettent d'accumuler l'information sur la rapidité avec laquelle $\varphi(x_m)$ s'approche de $\varphi(x^*)$, et dans le cas de la convexité forte, sur la rapidité avec laquelle x_m s'approche de x^*. Constatons que tant que l'ordre de la grandeur

$$\frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| \varphi'(x_k) \|^2}$$

n'est pas inférieur à $O\left(\frac{1}{k}\right)$, la relaxation reste convergente. Dans des situations réelles, on utilise le procédé suivant. On se donne la grandeur $\varepsilon > 0$, choisie à l'étape donnée en fonction de la précision des calculs, pour pour-

suivre la procédure tant que l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\|\varphi'(x_k)\|^2} \geqslant \varepsilon$$

ne soit violée. Mais dès que la situation commence à s'établir, l'utilisation ultérieure de l'algorithme de minimisation choisi ne présentant plus de changement, on arrête l'itération. Pour poursuivre la minimisation, on se guide soit par changement de paramètres de l'algorithme (par exemple, par l'amélioration de la précision des calculs), soit par l'adoption d'une autre méthode plus efficace dans le cas donné.

9.4. Méthodes de descente. Schéma général

Toutes les méthodes de descente utilisées pour résoudre des problèmes de minimisation sans contrainte se distinguent ou bien par le choix de la direction de descente ou bien par le mode de déplacement dans le sens de la descente. Ceci permet d'établir un algorithme général des méthodes de descente et d'examiner pour cet algorithme les questions de convergence et de stabilité.

Ainsi, le problème à résoudre consiste à minimiser la fonction $\varphi(x)$ sur l'espace E_n tout entier. Les méthodes de descente consistent à appliquer la procédure suivante de la construction de la suite $\{x_k\}$. A titre d'approximation initiale on adopte d'habitude un point quelconque $x_0 \in E_n$. Les approximations successives $x_1, x_2, \ldots$ se construisent suivant le s c h é m a suivant :

1) Choisir en x_k la direction de la descente $-s_k$.

2) Chercher la $(k+1)$-ième approximation d'après la formule

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k, \tag{9.7}$$

où comme grandeur β_k on prend un nombre quelconque vérifiant l'inégalité

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1-\lambda_k)\,\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k. \tag{9.8}$$

Ici λ_k est un nombre quelconque tel que $0 < \lambda_k \leqslant 1$, alors que

$$\omega_k = \min_{\beta} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

La figure 9.1 représente la trajectoire du point x_0 vers le point x_1, de x_1 vers x_2, etc.

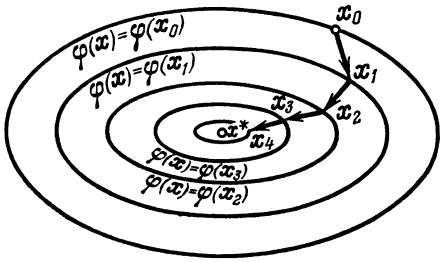

Fig. 9.1

Dans la plupart des méthodes de descente, la grandeur λ_k est prise généralement égale à l'unité. De cette façon, pour chercher β_k il faut réaliser une minimisation unidimensionnelle. Il est naturel que dans des circonstances réelles, le minimum unidimensionnel se calcule approximativement, par exemple, à l'aide d'une des méthodes examinées au chapitre 8. Pour le choix de β_k d'après la condition (9.8), la convergence d'un processus de relaxation (si elle a lieu) montre d'abord que la procédure de descente est stable par rapport aux erreurs de calcul éventuelles*). D'autre part, les méthodes numériques de minimisation unidimensionnelle imposent des calculs multiples des valeurs de la fonction à minimiser, ce qui provoque souvent des difficultés importantes, surtout si la valeur de $\varphi(x)$ se détermine expérimentalement. Dans une telle situation il est parfois avantageux de se borner à quelques pas dans le sens de la décroissance de $\varphi(x)$. C'est ce que la condition (9.8) rend précisément admissible. En effet, l'inégalité (9.8) entraîne

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k)-\omega_k].$$

D'où l'on tire avec (9.3)

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0\left[1+\frac{\mu_0}{\eta^2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\|\varphi'(x_k)\|^2}\right]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0\left[1+\frac{\mu_0}{\eta^2}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\frac{\varphi(x_k)-\omega_k}{\|\varphi'(x_k)\|^2}\right]^{-1}.$$

Ces estimations montrent que tant que la relation

$$\frac{\varphi(x_k)-\omega_k}{\|\varphi'(x_k)\|^2}$$

est assez grande, le nombre de calculs des valeurs de $\varphi(x)$ peut être réduit en abaissant la précision de minimisation unidimensionnelle, c'est-à-dire en diminuant la grandeur admissible λ_k.

Il arrive souvent au cours du calcul que malgré les estimations *a priori* qui témoignent (dans l'hypothèse que tout $\lambda_k = 1$) que la méthode converge avec une rapidité, disons, d'ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$, on découvre que le nombre d'itérations en augmentant ou bien rend la convergence plus lente, ou bien, en général, rend la procédure non convergente. Parmi les causes de ce fait peut être la perte de précision dans le calcul du minimum unidimensionnel. Les estimations données précédemment montrent que la situation défavorable, où

$$\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\|\varphi'(x_k)\|^2} < \varepsilon,$$

peut parfois être corrigée en améliorant la précision de la minimisation unidimensionnelle, c'est-à-dire en augmentant le paramètre λ_k de façon qu'on

*) La définition de la stabilité est donnée au paragraphe 9.1.

ait l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})}{\|\varphi'(x_k)\|^2} \geqslant \varepsilon.$$

L'amélioration de la précision de la minimisation unidimensionnelle s'impose généralement dans le voisinage du point du minimum et lorsque le point x_k est tel que dans certaines directions la dérivée soit voisine du zéro.

Désignons par α_k le cosinus de l'angle entre la direction de l'antigradient $-\varphi'(x_k)$ en x_k (c'est-à-dire la direction de la décroissance maximale de la fonction $\varphi(x)$ en ce point) et la direction de la descente $-s_k$ à partir de ce même point

$$\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \varphi'(x_k),\ s_k\rangle}{\|\varphi'(x_k)\|\ \|s_k\|}.$$

Théorème 9.4. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe appartenant à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) diam $X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_k\}$ *est une suite qui se construit d'après les formules* (9.7), (9.8), *alors l'estimation*

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0\left[1+C\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\alpha_k^2\right]^{-1} \quad (m=1, 2, \ldots) \qquad (9.9)$$

est vraie quel que soit $0 < C \leqslant 1/(2L\eta^2)$.

Démonstration. Pour toute valeur du paramètre β on déduit de (9.7), (9.8) que

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k)-\omega_k] \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k)-\varphi(x_k-\beta s_k)].$$

En utilisant le lemme 9.3 et la définition de la grandeur α_k, on en tire l'inégalité

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k\left[\beta\langle\varphi'(x_k), s_k\rangle-\frac{1}{2}L\beta^2\|s_k\|^2\right] =$$

$$= \lambda_k\left[\beta\alpha_k\|\varphi'(x_k)\|\cdot\|s_k\|-\frac{1}{2}L\beta^2\|s_k\|^2\right],$$

vraie quelles que soient les valeurs de β. En choisissant

$$\beta = \frac{\alpha_k}{L}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_k\|},$$

on obtient que

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\lambda_k\alpha_k^2\|\varphi'(x_k)\|^2 \geqslant 0. \qquad (9.10)$$

D'où, ainsi que de l'estimation (9.3), on a (9.9).

Remarque. S'il existe un indice m_0 tel que $a_{m_0} \neq 0$, alors (9.9) entraîne d'une façon analogue à 9.4 l'inégalité

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < 2L\eta^2\left[\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\alpha_k^2\right]^{-1} \quad (m=m_0+1, m_0+2, \ldots). \qquad (9.11)$$

Théorème 9.5. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction fortement convexe appartenant à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) $\{x_k\}$ *est une suite qui se construit d'après les formules* (9.7), (9.8), *alors les estimations*

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2L}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\alpha_k^2\right] \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (9.12)$$

et

$$\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2L}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\alpha_k^2\right] \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (9.13)$$

sont vraies.

Démonstration. Les estimations (9.12) et (9.13) se déduisent avec évidence de (9.5), (9.6) et (9.10).

Discussion. Si la direction $-s_k$ est choisie de façon que $|\alpha_k| \geqslant \alpha > 0$ pour tous les $k = 0, 1, \ldots$, et $\lambda_k \in [\lambda, 1]$, où $0 < \lambda \leqslant 1$, on déduit de (9.11) que

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \frac{2L\eta^2}{\alpha^2\lambda}\frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

alors que (9.12) et (9.13) amènent les estimations

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho\lambda\alpha^2}{2L}m\right] \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho\lambda\alpha^2}{2L}m\right] \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Il est évident que dans le sens de ces relations, les estimations les plus favorables s'obtiennent pour $|\alpha_k| = 1$ et $\lambda_k = 1$.

Constatons que le calcul du minimum unidimensionnel avec une précision élevée impose généralement un grand nombre de calculs de la fonction à minimiser (cf. les méthodes du chapitre 8), ce qui affaiblit souvent l'efficacité de la procédure de minimisation choisie.

Deuxième méthode de recherche de la grandeur β_k. La tâche la plus difficile dans la réalisation numérique des méthodes de descente est en général la recherche de la grandeur β_k. Sous ce rapport, l'intérêt de diverses approches de ce problème est très important.

Choisissons comme β_k le plus grand des nombres qui satisfont aux inégalités

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_k-\beta_k\Delta_k s_k) \geqslant \beta_k\Delta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k\rangle \quad \text{et} \quad \beta_k \geqslant 0, \qquad (9.14)$$

où q_k sont des nombres quelconques de l'intervalle semi-ouvert $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, et

$$\Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sign}\langle \varphi'(x_k), s_k\rangle.$$

Le rôle des nombres q_k est décrit à la fin du présent paragraphe.

Montrons d'abord qu'il existe un $\bar{\beta}_k$ vérifiant les inégalités (9.14). En effet, si l'on choisit

$$\bar{\beta}_k = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle}{L \| s_k \|^2} \Delta_k,$$

en utilisant le lemme 9.3 et le fait que $\Delta_k^2 = 1$, on obtient la relation

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \bar{\beta}_k \Delta_k s_k) \geqslant$$

$$\geqslant \bar{\beta}_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle - \frac{L}{2} \bar{\beta}_k^2 \Delta_k^2 \| s_k \|^2 =$$

$$= \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{L \| s_k \|^2} - \frac{L}{2} \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{L^2 \| s_k \|^4} \| s_k \|^2 =$$

$$= \frac{1}{2L} \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{\| s_k \|^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle}{L \| s_k \|^2} \Delta_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\beta}_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle \geqslant \bar{\beta}_k q_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle.$$

La recherche du plus grand élément vérifiant les inégalités (9.14) est parfois plus simple que la minimisation unidimensionnelle qu'il faut quelquefois réaliser pour satisfaire aux conditions (9.8). Pour calculer β_k on peut, par exemple, appliquer le procédé élémentaire suivant. On choisit une valeur initiale $\beta_{k_0} \geqslant 0$. Si la première des inégalités (9.14) est violée, on procède, par exemple, par division binaire de β_{k_0} tant que $\beta_{k_i} = \frac{1}{2^i} \beta_{k_0}$ satisfasse aux conditions (9.14). Cette procédure peut être poursuivie tant que

$$\beta_{k_{i+j}} = \frac{1}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{i+j}}\right) \beta_{k_0}$$

compromet la condition (9.14), etc.

Convergence. L'évaluation de la rapidité avec laquelle converge la méthode de descente pour le choix de β_k à partir des conditions (9.14) ne présente aucune difficulté.

Théorème 9.6. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe appartenant à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) diam $X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_k\}$ *est une suite définie par les relations* (9.7) *et* (9.14), *alors*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \frac{1}{L\eta^2} \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} q_k \alpha_k^2\right]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9.15}$$

Si, de plus, la fonction $\varphi(x)$ *est fortement convexe**), *on a*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{L} \sum_{k=0}^{m-1} q_k \alpha_k^2\right] \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{9.16}$$

*) La condition 2) devient alors superflue (cf. paragraphe 2.13, propriété 2).

et

$$\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{L} \sum_{k=0}^{m-1} q_k \alpha_k^2 \right] \quad (m = 1, 2, \ldots). \quad (9.17)$$

Démonstration. Puisque β_k est le plus grand des nombres qui vérifient les inégalités (9.14) alors que, comme nous l'avons vu,

$$\bar{\beta}_k = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle}{L \| s_k \|^2} \Delta_k$$

les vérifie aussi, donc $\beta_k \geqslant \bar{\beta}_k$; en tenant compte de la définition de α_k, on obtient de (9.14)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) = \varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k \Delta_k s_k) \geqslant \beta_k \Delta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \bar{\beta}_k \Delta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle = q_k \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{L \| s_k \|^2} = \frac{q_k}{L} \alpha_k^2 \| \varphi'(x_k) \|^2.$$

Il s'ensuit que les inégalités (9.3), (9.5) et (9.6) entraînent les estimations recherchées.

Discussion. Si L, la constante de Lipschitz, est connue, on peut affaiblir la condition d'après laquelle la grandeur β_k doit être la plus grande de celles qui satisfont aux inégalités (9.14), en exigeant que

$$\beta_k \geqslant \bar{\beta}_k = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle}{L \| s_k \|^2} \Delta_k.$$

En particulier, on peut prendre $\beta_k = \bar{\beta}_k$. Pourtant, il est difficile dans des circonstances réelles de calculer la valeur de L, si en général elle est calculable.

Considérons comment intervient la précision de la définition de la grandeur β_k à partir des conditions (9.14) dans la rapidité de convergence du processus de relaxation. Soit $q_k = 1/2$, $k = 0, 1, \ldots$; supposons que la procédure de la recherche de $\bar{\beta}_k$ ait donné sa valeur approchée telle que

$$\beta_k = \bar{\beta}_k + \varepsilon_k \geqslant 0.$$

Alors, en appliquant le lemme 9.3, on obtient

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k \Delta_k s_k) \geqslant \beta_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle -$$
$$- \frac{L}{2} \beta_k^2 \Delta_k^2 \| s_k \|^2 = \bar{\beta}_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle -$$
$$- \frac{L}{2} \bar{\beta}_k^2 \| s_k \|^2 + \varepsilon_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle -$$
$$- L \bar{\beta}_k \varepsilon_k \| s_k \|^2 - \frac{L}{2} \varepsilon_k^2 \| s_k \|^2.$$

Mais

$$\bar{\beta}_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle - \frac{L}{2} \bar{\beta}_k^2 \| s_k \|^2 = \frac{1}{2} \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{L \| s_k \|^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \bar{\beta}_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle,$$

et

$$\varepsilon_k \Delta_k \langle \varphi'(x_k),\ s_k\rangle - L\beta_k \varepsilon_k \| s_k \|^2 = 0,$$

par suite,

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k \Delta_k s_k) \geqslant \frac{1}{2}(\beta_k - \varepsilon_k)\Delta_k \langle \varphi'(x_k),\ s_k\rangle -$$

$$-\frac{L}{2}\varepsilon_k^2 \| s_k \|^2 \geqslant \beta_k \Delta_k \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\varepsilon_k|}{\beta_k}\right)\langle \varphi'(x_k),\ s_k\rangle - \frac{L}{2}\varepsilon_k^2 \| s_k \|^2.$$

Si ε_k est si petit qu'on peut négliger le deuxième terme du second membre de l'inégalité, les conditions (9.14) seront observées avec

$$q_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\varepsilon_k|}{\beta_k}\right).$$

A leur tour, les estimations (9.15)-(9.17) témoignent d'une dépendance importante de la convergence du processus vis-à-vis à la somme $\sum_{k=0}^{m-1} q_k \alpha_k^2$: si les directions de la descente $-s_k$ sont choisies de la sorte que tous les $|\alpha_k| \geqslant \alpha > 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{m-1} q_k \alpha_k^2 \geqslant \alpha^2 \sum_{k=0}^{m-1} q_k$$

et, donc, plus les valeurs de q_k sont proches de 1/2, c'est-à-dire plus la définition de la grandeur β_k est précise, plus la convergence assurée par nos estimations est rapide.

9.5. Méthode du gradient

Les estimations de la rapidité de convergence (9.9), (9.12), (9.13), (9.15)-(9.17) montrent que si $\alpha_k = 1$, le choix de la direction de la descente $-s_k$ peut s'avérer très heureux. Il est clair que si $s_k = \varphi'(x_k)$, on a

$$\alpha_k = \frac{\langle \varphi'(x_k),\ \varphi'(x_k)\rangle}{\| \varphi'(x_k) \| \| \varphi'(x_k) \|} = 1.$$

Un tel choix de la direction peut être encore favorisé par les considérations non formelles suivantes. Puisque l'antigradient, c'est-à-dire $-\varphi'(x_k)$, indique en x_k la direction dans laquelle la fonction décroît le plus vite, l'idée vient naturellement de se déplacer du point x_k dans cette direction.

La méthode de descente dans laquelle $s_k = \varphi'(x_k)$ s'appelle *méthode du gradient*.

Algorithme 1 de la procédure itérative de la méthode du gradient. Prendre comme approximation initiale un point quelconque $x_0 \in E_n$. En partant de la valeur trouvée de x_k construire d'après la formule $x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k$, où $s_k = \varphi'(x_k)$, la $(k+1)$-ième approximation x_{k+1} et choisir comme β_k un nombre qui satisfait à l'inégalité

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k,$$

où $0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1$, et

$$\omega_k = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Dans ce qui suit nous utiliserons l'écriture abrégée :

$$x_0 \in E_n,\ x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.7}$$

$$s_k = \varphi'(x_k), \tag{9.18}$$

$$\beta_k:\ \varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \tag{9.8}$$

$$\omega_k = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(x_k - \beta s_k). \tag{9.19}$$

Le théorème 9.4 donne l'estimation suivante de la rapidité avec laquelle converge l'algorithme 1 de la méthode du gradient

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\right]^{-1} < 2L\eta^2 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\right]^{-1} \leqslant \frac{2L\eta^2}{\lambda m}$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

alors que dans le cas d'une convexité forte de $\varphi(x)$, le théorème 9.5 donne

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2L} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\right] \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho\lambda}{2L} m\right]$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho\lambda}{2L} m\right] \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Dans le cas où $\lambda_k = 1$, c'est-à-dire où β_k est défini par minimisation unidimensionnelle

$$\varphi(x_k - \beta_k \varphi'(x_k)) = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(x_k - \beta\varphi'(x_k)),$$

le processus de relaxation s'appelle *méthode de la plus grande pente.*

Pour $\varphi(x) \in C^1(E_2)$ la méthode de la plus grande pente peut être interprétée géométriquement : x_{k+1} est un point de contact de la demi-droite

$$x(\beta) = x_k - \beta\varphi'(x_k) \quad (\beta \geqslant 0)$$

avec la ligne de niveau

$$\varphi(x) = \varphi(x_{k+1}).$$

Algorithme 2.

$$x_0 \in E_n, \quad x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k, \tag{9.7}$$

$$s_k = \varphi'(x_k), \tag{9.18}$$

$$\beta_k:\ \varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k s_k) \geqslant \beta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle,$$

$$\beta_k > 0, \quad 0 < q \leqslant q_k \leqslant \frac{1}{2}. \tag{9.19}$$

Ici (de même que dans les conditions (9.14)) on choisit comme β_k le plus grand nombre vérifiant les inégalités (9.19). Notons que le facteur

$$\Delta_k = \operatorname{sign} \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle,$$

qui figure dans (9.14), est omis dans (9.19) du fait que dans ce cas on a toujours $\Delta_k = 1$.

Pour cet algorithme, le théorème 9.6 donne les estimations suivantes de la rapidité de convergence : pour une fonction convexe $\varphi(x)$ on a

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0}{L\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} q_k \right]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0 q}{L\eta^2} m \right]^{-1} < \frac{L\eta^2}{qm} \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

lorsque $\varphi(x)$ est une fonction à convexité forte, les estimations deviennent

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp \left[-\frac{\varrho}{L} \sum_{k=0}^{m-1} q_k \right] \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 \exp \left[-\frac{\varrho q}{L} m \right] \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$\|x_m - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp \left[-\frac{\varrho q}{L} m \right] \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Les estimations *a priori* de la rapidité avec laquelle convergent les méthodes de descente montrent que la méthode du gradient dépend sensiblement de la précision des calculs de $\varphi'(x_k)$ et de β_k. La perte de précision très courante dans le voisinage des minimums ou dans une situation où dans certaines directions la dérivée est voisine du zéro (ravin) peut, en général, compromettre la convergence de la relaxation par la méthode du gradient. Dans ce cas, s'il est impossible d'améliorer la précision des calculs, il devient nécessaire de faire appel à d'autres méthodes qui, à la différence de la méthode du gradient, en plus de la convexité tiennent compte d'autres propriétés de la fonction à minimiser.

9.6. Méthode des directions conjuguées

Il existe une classe des méthodes qui, quant à la complexité des calculs, se distinguent peu des méthodes du gradient qui minimisent en un nombre fini d'itérations les fonctions quadratiques strictement convexes. A cette classe appartient la méthode dite des *directions conjuguées**). La raison pour laquelle la méthode des directions conjuguées est appliquée aux problèmes de minimisation de forme générale réside dans le fait que dans le voisinage

*) Le lecteur familier aux méthodes numériques de l'algèbre linéaire connaît cette méthode sous le nom de la méthode des gradients conjugués de résolution des équations linéaires algébriques de la forme $Ax = b$, et, donc, comme une méthode de minimisation de la fonction quadratique $\varphi(x) = \|Ax - b\|^2$ (cf. [1]).

d'un point de minimum les propriétés d'une fonction convexe $\varphi(x)$ s'apparentent en général à celles d'une fonction quadratique.

Algorithme de la méthode.

$$x_0 \in E_n, \quad x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.7}$$

$$s_0 = \varphi'(x_0), \quad s_k = \varphi'(x_k) - \xi_k s_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9.20}$$

$$\beta_k: \ \varphi(x_{k+1}) = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(x_k - \beta s_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9.21}$$

Les variantes différentes de la méthode des directions conjuguées se distinguent par le choix du paramètre ξ_k. Constatons que si tous les $\xi_k = 0$, l'algorithme considéré se confond avec la méthode de la plus grande pente, la condition (9.21) coïncidant dans ce cas avec (9.8) pour $\lambda_k = 1$.

La condition (9.21) du choix de β_k détermine les deux particularités suivantes de la suite $\{x_k\}$.

Lemme 9.4. *Pour une fonction dérivable $\varphi(x)$, la suite $\{x_k\}$ construite d'après l'algorithme* (9.7), (9.20), (9.21) *est telle qu'elle vérifie les relations suivantes*

$$\langle \varphi'(x_{k+1}), s_k \rangle = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.22}$$

$$\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle = \| \varphi'(x_k) \|^2 \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9.23}$$

Démonstration. La condition (9.21) entraîne pour $\beta_k > 0$

$$\frac{d}{d\beta} \varphi(x_k - \beta s_k) \Big|_{\beta = \beta_k} = 0,$$

et pour $\beta_k = 0$ (cf. théorème 2.12), on a

$$\frac{d}{d\beta} \varphi(x_k - \beta s_k) \Big|_{\beta = 0} \geqslant 0.$$

Si $\beta_k > 0$, il vient

$$0 = \frac{d}{d\beta} \varphi(x_k - \beta s_k) \Big|_{\beta = \beta_k} = -\langle \varphi'(x_k - \beta_k s_k), s_k \rangle = -\langle \varphi'(x_{k+1}), s_k \rangle.$$

Pour démontrer que la relation (9.22) est vraie aussi pour $\beta_k = 0$, procédons par récurrence. Si $\beta_0 = 0$, alors $x_1 = x_0$ et $s_0 = \varphi'(x_0)$ impliquent

$$0 \leqslant \frac{d}{d\beta} \varphi(x_0 - \beta s_0) \Big|_{\beta = 0} = -\langle \varphi'(x_1), s_0 \rangle = -\| \varphi'(x_0) \|^2,$$

d'où l'égalité

$$\langle \varphi'(x_1), s_0 \rangle = 0.$$

Supposons que la relation $\langle \varphi'(x_k), s_{k-1} \rangle = 0$ soit vraie. Prouvons que

$$\langle \varphi'(x_{k+1}), s_k \rangle = 0$$

pour $\beta_k = 0$. Puisque $x_{k+1} = x_k$, (9.20) conduit à

$$0 \leqslant \frac{d}{d\beta} \varphi(x_k - \beta s_k) \Big|_{\beta = 0} = -\langle \varphi'(x_{k+1}), s_k \rangle =$$

$$= -\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle = -\langle \varphi'(x_k), \varphi'(x_k) - \xi_k s_{k-1} \rangle = -\| \varphi'(x_k) \|^2,$$

d'où l'on tire précisément (9.22).

Enfin, la relation (9.23) est une conséquence évidente des égalités (9.20) et (9.22).

Le théorème suivant établit les conditions du choix du paramètre ξ_k qui assurent la convergence de la méthode des directions conjuguées avec une rapidité de même ordre que dans les méthodes du gradient.

Théorème 9.7. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe qui appartient à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) diam $X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_k\}$ *est une suite construite suivant l'algorithme* (9.7), (9.20), (9.21) ;

4) *il existe un nombre non négatif* $C \geqslant 0$ *vérifiant la relation*

$$|\xi_k| \leqslant C \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|} \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{9.24}$$

alors on a l'estimation

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0[1 + \mu_0 C_1 m]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où

$$0 < C_1 \leqslant \frac{1}{2L\eta^2(1+C)^2}.$$

Si, de plus, la fonction $\varphi(x)$ *est fortement convexe, alors*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp(-C_2 m)$$

et

$$\|x_m - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp(-C_2 m),$$

où

$$0 < C_2 \leqslant \frac{\varrho}{2L(1+C)^2}.$$

Démonstration. (9.20) et (9.24) conduisent à l'inégalité

$$\|s_k\|^2 \leqslant (\|\varphi'(x_k)\| + |\xi_k| \, \|s_{k-1}\|)^2 \leqslant (1+C)^2 \|\varphi'(x_k)\|^2.$$

Compte tenu de (9.23) on en tire :

$$\alpha_k^2 = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{\|\varphi'(x_k)\|^2 \|s_k\|^2} \geqslant \frac{1}{(1+C)^2}.$$

Puisque la suite $\{x_k\}$ vérifie toutes les conditions des théorèmes 9.4 et 9.5 (la condition (9.21) est équivalente à la condition (9.8) pour $\lambda_k = 1$), les estimations (9.9), (9.12) et (9.13) conduisent tout de suite au résultat désiré.

Remarquons que le théorème 9.7 donne des estimations qui assurent la convergence de la méthode des directions conjuguées mais ne rend pas évidentes ses mérites, et notamment le fait que la méthode est finie pour $\varphi(x)$ quadratique.

Considérons trois modes de choix du paramètre ξ_k qui assurent la finitude de la méthode dans le cas quadratique.

Mode 1.

$$\xi_k = -\frac{1}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}\langle\varphi'(x_k), \varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1})\rangle.$$

Supposons que $\varphi(x)$ est fortement convexe. On déduit alors de (2.21) que

$$\langle\varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1}), \quad x_k-x_{k-1}\rangle \geqslant \varrho\,\|x_k-x_{k-1}\|^2,$$

d'où, compte tenu de (9.7), (9.22) et (9.23), l'inégalité

$$\varrho\beta_{k-1}^2\|s_{k-1}\|^2 \leqslant -\beta_{k-1}\langle\varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1}), s_{k-1}\rangle = \\ = \beta_{k-1}\langle\varphi'(x_{k-1}), s_{k-1}\rangle = \beta_{k-1}\|\varphi'(x_{k-1})\|^2.$$

Puisque nous supposons toujours que pour tout $k = 0, 1, \ldots$, on a $\varphi'(x_k) \neq 0$, la démonstration du lemme 9.4 entraîne que $\beta_k > 0$, du fait que $\beta_{k-1} = 0$ entraîne $\|\varphi'(x_{k-1})\| = 0$. Ainsi

$$\|\varphi'(x_{k-1})\|^2 \geqslant \varrho\beta_{k-1}\|s_{k-1}\|^2.$$

Tenons-en compte ainsi que de la condition

$$\|\varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1})\| \leqslant L\|x_k-x_{k-1}\|$$

pour évaluer la grandeur ξ_k :

$$|\xi_k| = \frac{1}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}|\langle\varphi'(x_k), \varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1})\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}\|\varphi'(x_k)\|\,\|\varphi'(x_k)-\varphi'(x_{k-1})\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}\|\varphi'(x_k)\|\cdot L\|x_k-x_{k-1}\| =$$

$$= \frac{L}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}\|\varphi'(x_k)\|\cdot\beta_{k-1}\|s_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{\varrho\beta_{k-1}\|s_{k-1}\|^2}\|\varphi'(x_k)\|\beta_{k-1}\|s_{k-1}\| =$$

$$= \frac{L}{\varrho}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}.$$

De la sorte, la condition (9.24) est vérifiée, ce qui permet d'obtenir du théorème 9.7 les estimations

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp(-C_3 m)$$

et

$$\|x_m-x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\mu_0 \exp(-C_3 m),$$

où

$$0 < C_3 \leqslant \frac{\varrho^3}{2L(\varrho+L)^2}.$$

Mode 2.

$$\xi_k = -\frac{\langle \varphi''(x_k)\, s_{k-1},\, \varphi'(x_k)\rangle}{\langle \varphi''(x_k)\, s_{k-1},\, s_{k-1}\rangle}.$$

Il est peu vraisemblable que ce mode de choix du paramètre ξ_k puisse être reconnu comme efficace du fait qu'il impose à chaque itération le calcul de la matrice $\varphi''(x_k)$, qui est une procédure très lourde. Toutefois, l'analyse élémentaire de la convergence est utile par son aspect méthodique, parce que les méthodes analogues sont appliquables aux estimations de la rapidité de convergence des méthodes dites quasinewtoniennes (cf., par exemple, [4]), dont on trouve des versions multiples dans différents articles qui ne cessent de paraître jusqu'à ces derniers temps.

Supposons qu'une fonction $\varphi(x)$ fortement convexe soit deux fois continûment dérivable et telle que la norme de la matrice $\varphi''(x)$ soit uniformément bornée sur l'ensemble borné $X_0 = \{x: \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$:

$$\|\varphi''(x)\| \leqslant \nu < \infty.$$

Comme

$$\langle \varphi'(x+\varepsilon y) - \varphi'(x),\, y\rangle = \varepsilon\langle \varphi''(x+\varepsilon\theta y)\, y,\, y\rangle, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1^*),$$

en tenant compte de la propriété (2.21) des fonctions fortement convexes, on obtient que

$$\langle \varphi''(x+\varepsilon\theta y)\, y,\, y\rangle \geqslant \varrho\, \|y\|^2.$$

En passant dans cette inégalité à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on aboutit à la relation

$$\langle \varphi''(x)\, y,\, y\rangle \geqslant \varrho\, \|y\|^2, \tag{9.25}$$

vraie quel que soit $y \in E_n$. Par suite, on obtient

$$|\xi_k| = \frac{|\langle \varphi''(x_k)\, s_{k-1},\, \varphi'(x_k)\rangle|}{|\langle \varphi''(x_k)\, s_{k-1},\, s_{k-1}\rangle|} \leqslant \frac{\|\varphi''(x_k)\|\, \|s_{k-1}\|\, \|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|^2} \leqslant \frac{\nu}{\varrho}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}$$

pour tirer du théorème 9.7 les estimations

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp(-C_4 m)$$

et

$$\|x_m - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\mu_0 \exp(-C_4 m),$$

où

$$0 < C_4 \leqslant \frac{\varrho^3}{2L(\varrho+\nu)^2}.$$

Mode 3. (cf. [11]).

$$\xi_k = \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2}.$$

*) Cf., par exemple, [9].

Pour évaluer la rapidité de convergence dans le cas de $\varphi(x)$ fortement convexe, démontrons quelques propositions.

Proposition 1. *Tout $k = 1, 2, \ldots$ donne lieu à la relation*

$$\xi_k = \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}\sqrt{\sigma_k - 1},$$

où

$$\sigma_k = 1 + \xi_k + \xi_k\xi_{k-1} + \ldots + \xi_k\xi_{k-1}\ldots\xi_1.$$

Démonstration. D'après (9.20) et (9.22) on a

$$\|s_k\|^2 = \|\varphi'(x_k)\|^2 + \xi_k^2\|s_{k-1}\|^2.$$

En l'utilisant, montrons que

$$\|s_k\|^2 = \|\varphi'(x_k)\|^2\sigma_k.$$

En effet, pour $k = 1$ cette égalité est évidente. Sous l'hypothèse de récurrence que cette égalité est vraie pour $k > 1$, démontrons-la pour $k+1$: puisque $1 + \xi_{k+1}\sigma_k = \sigma_{k+1}$, il vient

$$\begin{aligned}\|s_{k+1}\|^2 &= \|\varphi'(x_{k+1})\|^2 + \xi_{k+1}^2\|s_k\|^2 = \|\varphi'(x_{k+1})\|^2 + \xi_{k+1}^2\|\varphi'(x_k)\|^2\sigma_k = \\ &= \|\varphi'(x_{k+1})\|^2 + \xi_{k+1}\|\varphi'(x_{k+1})\|^2\sigma_k = \\ &= \|\varphi'(x_{k+1})\|^2(1 + \xi_{k+1}\sigma_k) = \|\varphi'(x_{k+1})\|^2\sigma_{k+1}.\end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, appliquons les relations obtenues :

$$\begin{aligned}\xi_k &= \sqrt{\xi_k}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|\varphi'(x_{k-1})\|} = \sqrt{\xi_k}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}\sqrt{\sigma_{k-1}} = \\ &= \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}\sqrt{\xi_k\sigma_{k-1}} = \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}\sqrt{\sigma_k - 1}.\end{aligned}$$

Proposition 2. *Quel que soit l'indice $k = 1, 2, \ldots$ on a l'inégalité*

$$0 \leqslant \xi_k \leqslant C\sqrt{k}\frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|},$$

où $C = \sqrt{2 + 12\frac{L^2}{\varrho^2}}$, L est la constante de Lipschitz dans la condition $\varphi(x) \in C^{1,1}(E_n)$, et ϱ le paramètre de convexité forte.

Démonstration. Comme la fonction $\varphi(x)$ est fortement convexe, appartient à la classe $C^{1,1}(E_n)$ et, de plus, $\varphi(x_m) \leqslant \varphi(x_p)$ pour tout $m \geqslant p$ et $p = 0, 1, \ldots$, la formule (2.27) (cf. paragraphe 2.13, propriété 4) entraîne

$$\|\varphi'(x_m)\| \leqslant C\|\varphi'(x_p)\|, \quad m \geqslant p, \quad p = 0, 1, \ldots$$

Mais

$$\begin{aligned}\sigma_k &= 1 + \xi_k + \xi_k\xi_{k-1} + \ldots + \xi_k\xi_{k-1}\ldots\xi_1 = \\ &= 1 + \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_{k-1})\|^2} + \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_{k-2})\|^2} + \ldots + \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_0)\|^2} \leqslant 1 \quad C^2k\ ;\end{aligned}$$

donc

$$\xi_k = \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}\sqrt{\sigma_k - 1} \leqslant \frac{\|\varphi'(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|} C\sqrt{k}.$$

Proposition 3. *Les approximations successives construites suivant le mode 3 donnent lieu aux estimations suivantes :*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \mu_0 \frac{1}{m^\gamma}$$

et

$$\|x_m - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho}\mu_0 \frac{1}{m^\gamma},$$

vraies pour tout

$$0 < \gamma \leqslant \frac{\varrho^3}{4L(\varrho^2 + 6L^2)}.$$

Démonstration. Il résulte de (9.20), (9.22), (9.23) et de la proposition 2 que

$$\alpha_k^2 = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k\rangle^2}{\|\varphi'(x_k)\|^2 \|s_k\|^2} = \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_k)\|^2 + \xi_k^2 \|s_{k-1}\|^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\|\varphi'(x_k)\|^2}{\|\varphi'(x_k)\|^2 + \|\varphi'(x_k)\|^2 C^2 k} = \frac{1}{1 + C^2 k} > \frac{1}{C^2(k+1)},$$

par suite,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 > \frac{1}{C^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} > \frac{1}{C^2} \ln m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

On en déduit avec (9.12) et (9.13) pour $\lambda_k = 1$ que

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2L}\frac{1}{C^2}\ln m\right] < \mu_0 \frac{1}{m^\gamma}$$

pour tout

$$0 < \gamma \leqslant \frac{\varrho}{2LC^2} = \frac{\varrho^3}{4L(\varrho^2 + 6L^2)}$$

et

$$\|x_m - x^*\|^2 < \frac{2}{\varrho}\mu_0 \frac{1}{m^\gamma}.$$

Discussion. Bien que les estimations mentionnées soient vraies pour tout $m = 1, 2, \ldots$ et garantissent une certaine rapidité de convergence pour la méthode des directions conjuguées, pourtant, comme nous l'avons vu, elles ne rendent pas évidents les avantages de la méthode ; or, chacune des trois méthodes traitées pour définir la grandeur ξ_k conduit pour une fonction quadratique strictement convexe $\varphi(x)$ à la solution du problème en un nombre fini d'itérations ne dépassant pas la dimension n

de l'espace E_n. Ce fait, dont le lecteur peut trouver au besoin la démonstration par exemple dans [2], joue un rôle notable dans l'utilisation de la méthode pour minimiser des fonctions non quadratiques. Plus précisément, d'après la méthode des directions conjuguées on effectue n itérations, après quoi on procède à une « rénovation » de la méthode en posant $\xi_n = 0$, c'est-à-dire en appliquant la méthode du gradient. Ainsi, l'algorithme de la méthode dans ce cas se présente de la façon suivante :

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k,$$
$$s_k = \varphi'(x_k) - \bar{\xi}_k s_{k-1},$$
$$\bar{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k, & k \in I_1, \\ 0, & k \in I_2 = \{0, n, 2n, 3n, \ldots\} \end{cases}$$

et

$$I_1 \cup I_2 = \{0, 1, \ldots\},$$
$$\varphi(x_{k+1}) = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(x_k - \beta s_k),$$

alors que la grandeur ξ_k se définit en se guidant sur les considérations de finitude de la méthode dans le cas quadratique, par exemple, sur l'une des méthodes exposées précédemment.

Enfin, il convient de noter que la méthode des directions conjuguées est très sensible aux erreurs commises dans la marche du calcul du fait que si $\lambda_k \neq 1$, la propriété d'orthogonalité (9.22) est compromise et de ce fait la méthode cesse d'être finie dans le cas quadratique.

Les méthodes de minimisation sans contrainte passées en revue s'appellent méthodes de premier ordre, puisque pour définir la direction de la descente il importe de connaître la dérivée première, gradient de la fonction $\varphi(x)$. Pourtant, il arrive souvent que le calcul du gradient impose un grand volume de travail et dégrade par là même l'efficacité de ces méthodes. Les méthodes qui suivent n'imposent pas le calcul du gradient. Il est vrai que des estimations *a priori* témoignent de leur convergence plus lente par rapport aux méthodes de premier ordre, mais dans certains cas cet inconvénient se compense par la simplicité du calcul de la direction de la descente.

9.7. Méthode séquentielle

Choisissons à chaque itération comme direction de la descente $-s_k$ celle dans le sens de l'un des axes de coordonnées. Ce paragraphe décrit un algorithme ne présentant pas les avantages d'un choix de la direction de la descente indépendant du gradient de la fonction, mais par contre il donne des estimations qui assurent la convergence de minimisation avec une rapidité de l'ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$. L'intérêt de ces estimations est dû au fait qu'elles montrent quelle dépendance importante existe entre la rapidité de convergence et la dimension de l'espace E_n.

Supposons que x_k soit déjà connu et soit

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_i} \right| = \left| \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j} \right|.$$

On peut admettre que

$$\left| \frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j} \right| > 0,$$

puisque, dans le cas contraire, $x_k = x^*$ et la minimisation s'arrête.

Algorithme de la méthode :

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k, \tag{9.7}$$

$s_k = e_j$, ce dernier étant le j-ième vecteur de base

$$\beta_k : \varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1-\lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \tag{9.8}$$

où

$$\omega_k = \min_{\beta} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Etablissons la rapidité de convergence de la méthode en supposant que la fonction $\varphi(x)$ vérifie les conditions du théorème 9.4, et dans le cas d'une convexité forte, celles du théorème 9.5.

Comme

$$\alpha_k^2 = \frac{\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle^2}{\| \varphi'(x_k) \|^2 \| s_k \|^2} = \frac{\langle \varphi'(x_k), e_j \rangle^2}{\| \varphi'(x_k) \|^2 \| e_j \|^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j} \right)^2}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \geqslant \frac{\left(\frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j} \right)^2}{n \cdot \max\limits_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_i} \right)^2} = \frac{1}{n},$$

(9.9) conduisent à l'estimation

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \right]^{-1} < \frac{2L\eta^2 n}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda_k} \leqslant \frac{2L\eta^2 n}{\lambda m} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Ainsi, dans l'estimation de la rapidité de convergence de cette méthode, la constante affectée à la grandeur $1/m$ est n fois plus grande que la constante correspondante des estimations de la méthode du gradient.

Or, dans le cas où $\varphi(x)$ est une fonction fortement convexe, on obtient de (9.12) et (9.13) les estimations

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2Ln} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \right] \leqslant \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho \lambda}{2Ln} m \right]$$

et

$$\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho}{2Ln} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \right] \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp\left[-\frac{\varrho\lambda}{2Ln} m \right]$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

9.8. Méthode séquentielle cyclique

Dans cette méthode le choix de la direction de la descente ne dépend pas de l'information sur le gradient de la fonction à minimiser : on emprunte d'abord la direction e_1, puis e_2, etc. jusqu'à e_n, après quoi on reprend le cycle.

Cette méthode s'emploie souvent au début de la minimisation. Son algorithme bien simple, l'inutilité de calculer la direction de la descente en font une méthode riche de promesses pour obtenir les approximations initiales des méthodes de minimisation plus précises.

Cette méthode présente encore un autre avantage, celui de fournir des facteurs d'échelle pour le changement de variables. Examinons ceci de plus près sur un exemple bien simple. Soit

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2, \quad \alpha_i > 0.$$

Si la différence entre les nombres α_i est très grande, les lignes (surfaces) de niveau de la fonction $\varphi(x)$ sont très étirées dans les directions e_i qui correspondent à de faibles valeurs de α_i. Dans ces conditions, lorsqu'on suit l'antigradient (méthode du gradient), le déplacement vers le minimum est assez lent. En réalisant la substitution des variables $x_i = \mu_i y_i$ on peut transformer les surfaces de niveau en sphères. A cet effet il faut prendre $\mu_i = \alpha_i^{-1/2}$. Dans les nouvelles variables, le minimum d'une fonction quadratique s'obtient par la méthode du gradient en une itération. La transformation $x_i = \alpha_i^{-1/2} y_i$ s'appelle changement des échelles.

Dans le cas où $\varphi(x)$ est une fonction convexe lisse, on adopte

$$\mu_i = \left(\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \right)^{-1/2}$$

au point x du minimum unidimensionnel dans la direction e_i. Le facteur μ_i est proportionnel au rayon de courbure de la ligne de niveau en x. Et bien que cette transformation ne rende pas sphériques les surfaces de niveau, elle diminue leur allongement et par là même facilite l'application des méthodes du gradient à la minimisation.

Pour calculer les grandeurs $\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2}$, on procède à l'approximation par leurs différences finies. La méthode séquentielle cyclique permet justement d'obtenir des approximations successives des facteurs d'échelle μ_i.

Décrivons l'algorithme de la méthode.

Premier cycle.

En partant d'un point arbitraire x_0 on construit

$$x_1 = x_0 - \beta_0 e_1,$$
$$x_2 = x_1 - \beta_1 e_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} - \beta_{n-1} e_n.$$

Deuxième cycle.

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n e_1,$$
$$x_{n+2} = x_{n+1} - \beta_{n+1} e_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{2n} = x_{2n-1} - \beta_{2n-1} e_n.$$

l-ième cycle.

$$x_{nl+j} = x_{nl+j-1} - \beta_{nl+j-1} e_j \quad (j = \overline{1, n};\ l = 0, 1, \ldots),$$
$$\beta_{nl+j-1}\colon\ \varphi(x_{nl+j}) \leqslant (1 - \lambda_{nl+j-1})\,\varphi(x_{nl+j-1}) + \lambda_{nl+j-1}\omega_{nl+j-1},$$
$$\omega_{nl+j-1} = \min_{\beta} \varphi(x_{nl+j-1} - \beta e_j), \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_{nl+j-1}.$$

La grandeur β peut être définie encore d'autres façons, par exemple, d'après les formules (9.14). Constatons que si en appliquant la méthode on ne cherche pas les facteurs d'échelle, d'habitude le pas β est pris constant et on ne le change que si le choix devient mauvais.

Pour les fonctions convexes de la classe $C^{1,1}(E_n)$ la rapidité de convergence de l'ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$ ne peut être assurée que pour $n = 2$ en vertu des estimations du paragraphe précédent. En même temps, on montre sans peine que si la suite $\{x_k\}$ converge, en son point limite $\bar{x}$ on a $\varphi'(\bar{x}) = 0$.

Théorème 9.8. *Si $\varphi(x)$ est une fonction appartenant à la classe $C^{1,1}(E_n)$ et la suite $\{x_k\}$, construite par la méthode séquentielle cyclique, converge pour $k \to \infty$ vers le point $\bar{x}$, alors $\varphi'(\bar{x}) = 0$ et, par conséquent, $\bar{x}$ est un point stationnaire**).

Démonstration. Ecrivons la suite $\{x_k\}$ sous la forme suivante

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k e_{j(k)},$$

où $j(k)$ prend respectivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$. En appliquant le lemme 9.3 et la définition de β_k, on obtient (d'une façon analogue au paragraphe précédent)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{\lambda}{2L}\left(\frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_{j(k)}}\right)^2.$$

La suite $\{x_k\}$ étant convergente, $\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \to 0$ pour $k \to \infty$ et $\frac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_{j(k)}} \to 0$ pour $k \to \infty$. Au point limite $\bar{x}$ on a $\varphi'(\bar{x}) = 0$. En effet, si on suppose que dans une certaine direction e_i on ait $\left(\frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^2 = \xi > 0$, alors

*) Pour une fonction convexe $\varphi(x)$, $\bar{x}$ est un point du minimum.

dans un voisinage assez petit de ce point on a $\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\xi$. Mais comme à partir d'un certain indice k_0, tous les points x_k tombent dans notre voisinage, cette dernière inégalité contredit le fait que $\left(\frac{\partial\varphi(x_k)}{\partial x_{j(k)}}\right)^2 \to 0$ pour $k \to \infty$.

Au paragraphe 9.11 la convergence de la méthode séquentielle cyclique sera démontrée sous des hypothèses plus faibles.

9.9. Méthode séquentielle aléatoire

Une méthode encore plus riche de promesses que la précédente est celle où le choix de la direction de descente est aléatoire. Dans cette approche, il existe des estimations *a priori* qui pour $m \to \infty$ assurent dans le cas convexe avec une probabilité qui tend vers l'unité une rapidité de convergence de l'ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$, et dans le cas d'une convexité forte, une rapidité exponentielle.

Voici la procédure de k-ième pas de ce processus: parmi les n nombres $\{1, 2, \ldots, n\}$ réaliser le choix aléatoire de $j(k)$ et choisir comme s_k le vecteur unité de base $e_{j(k)}$, après quoi effectuer la descente.

Algorithme 1.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.7}$$

$$s_k = e_{j(k)}, \tag{9.27}$$

$$\beta_k : \varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{9.8}$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \min_{\beta} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.7}$$

$$s_k = e_{j(k)},$$

$$\beta_k : \varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k \Delta_k s_k) \geqslant \beta_k \Delta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle, \tag{9.14}$$

$$\beta_k \geqslant 0, \quad 0 < q \leqslant q_k \leqslant \frac{1}{2}, \quad \Delta_k = \operatorname{sign} \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle.$$

Pour démontrer la convergence des processus de relaxation définis par ces algorithmes nous utiliserons les propriétés évidentes qui se déduisent des axiomes du calcul des probabilités.

Soient u, v et w des variables aléatoires. Les égalités $P\{u \leqslant v\} = 1$ et $P\{v \leqslant w\} = 1$ entraînent l'égalité

$$P\{u \leqslant w\} = 1. \tag{9.28}$$

Si $P\{u \leqslant v\} = 1$, et $P\{v \leqslant w\} = p$, alors

$$P\{u \leqslant w\} \geqslant p. \tag{9.29}$$

Théorème 9.9. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe appartenant à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_k\}$ *est une suite qui se construit soit d'après l'algorithme* 1, *soit d'après l'algorithme* 2, *il vient*

$$\lim_{m \to \infty} P\left\{\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \frac{C}{m}\right\} = 1,$$

où $0 < C \leqslant \dfrac{2L\eta^2 n^2}{\lambda}$ *dans le cas de l'algorithme* 1 *et* $0 < C \leqslant \dfrac{L\eta^2 n^2}{q}$ *dans celui de l'algorithme* 2.

Si de plus la fonction $\varphi(x)$ *est fortement convexe,*

$$\lim_{m \to \infty} P\{\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \exp(-Cm)\} = 1$$

et

$$\lim_{m \to \infty} P\left\{\| x_m - x^* \|^2 \leqslant \frac{2}{\varrho} \mu_0 \exp(-Cm)\right\} = 1,$$

où $C \leqslant \dfrac{\varrho\lambda}{2Ln^2}$ *dans le cas de l'algorithme* 1 *et* $C \leqslant \dfrac{\varrho q}{Ln^2}$ *dans le cas de l'algorithme* 2.

Démonstration. Soient $j_1, j_2, \ldots, j_s$ les indices tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant n$ et

$$\left|\frac{\partial\varphi(x_k)}{\partial x_{jl}}\right| = \max_{i = \overline{1, n}} \left|\frac{\partial\varphi(x_k)}{\partial x_i}\right| \quad (l = \overline{1, s}).$$

Comme $j(k)$ est une variable aléatoire telle que

$$P\{j(k) = i\} = \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

l'indicateur de la variable aléatoire $j(k)$

$$\varkappa_{j(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j(k) = j_1, \\ 0 & \text{si} \quad j(k) \neq j_1, \end{cases}$$

atteint l'unité avec une probabilité $1/n$. Puisque $j(0), j(1), \ldots$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, $\varkappa_{j(0)}, \varkappa_{j(1)}, \ldots$ sont également indépendantes. Pour $\varkappa_{j(k)} = 1$ on a

$$\alpha_{j(k)}^2 = \frac{\langle \varphi'(x_k), e_{j(k)} \rangle^2}{\| \varphi'(x_k) \|^2} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \varkappa_{j(k)} \alpha_k^2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \varkappa_{j(k)}. \tag{9.30}$$

D'après la loi des grands nombres, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varkappa_{j(k)} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

ou

$$P\left\{\frac{m}{n}-\varepsilon m<\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}<\frac{m}{n}+\varepsilon m\right\}=1+o(1),$$

$$1+o(1)\leqslant P\left\{\frac{m}{n}-\varepsilon m<\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right\}=$$

$$=P\left\{1+\mu_0\frac{C}{n}\left(\frac{m}{n}-\varepsilon m\right)\leqslant 1+\mu_0\frac{C}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right\}=$$

$$=P\left\{\mu_0\left[1+\mu_0\frac{C}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right]^{-1}\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\mu_0\left[1+\mu_0\frac{C}{n}\left(\frac{m}{n}-\varepsilon m\right)\right]^{-1}\right\}. \tag{9.31}$$

Les théorèmes 9.4 et 9.6 impliquent

$$P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*)\leqslant\mu_0\left[1+C\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2\right]^{-1}\right\}=1$$

$$(m=1,2,\ldots),$$

où $0<C\leqslant\frac{\lambda}{2L\eta^2}$ dans le cas de l'algorithme 1 et $0<C\leqslant\frac{q}{L\eta^2}$ dans le cas de l'algorithme 2. Puisque l'inégalité (9.30) signifie que

$$P\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right\}=1\quad(m=1,2,\ldots),$$

la propriété (9.28) conduit à l'égalité

$$P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*)\leqslant\mu_0\left[1+C\frac{\mu_0}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right]^{-1}\right\}=1.$$

On en tire avec (9.31) et compte tenu de (9.29)

$$1\geqslant P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*)\leqslant\mu_0\left[1+C\frac{\mu_0}{n}m\left(\frac{1}{n}-\varepsilon\right)\right]^{-1}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant P\left\{\mu_0\left[1+C\frac{\mu_0}{n}m\left(\frac{1}{n}-\varepsilon\right)\right]^{-1}<\mu_0\left[1+C\frac{\mu_0}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\varkappa_{j(k)}\right]^{-1}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant 1+o(1);$$

par conséquent,

$$\lim_{m\to\infty}P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*)\leqslant\mu_0\left[1+C\frac{\mu_0}{n}m\left(\frac{1}{n}-\varepsilon\right)\right]^{-1}\right\}=1.$$

Mais si la fonction $\varphi(x)$ est fortement convexe, les estimations correspondantes se déduisent des théorèmes 9.5 et 9.6.

Attirons l'attention sur le fait que par rapport aux estimations respectives des théorèmes 9.4, 9.5 et 9.6 la constante C ici est n^2 fois plus grande.

Pour démontrer le théorème 9.9 nous avons formulé des hypothèses qu'il est facile de rejeter. Notamment, pour définir l'indicateur $\varkappa_{j(k)}$ il est plus avantageux d'écrire

$$\varkappa_{j(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j(k) = j_l \quad (l = \overline{1, s}), \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Par ailleurs, le choix de l'indice $j(k)$ doit se faire non pas parmi les n nombres $\{1, 2, \ldots, n\}$ mais parmi les $(n-1)$ nombres $\{1, 2, \ldots, j(k-1)-1, j(k-1)+1, \ldots, n\}$, puisqu'il n'y a aucun sens de descendre au $(k+1)$-ième pas dans la direction $-s_{k-1}$. Il est évident que dans ce cas la constante C des estimations correspondantes devient plus petite.

9.10. Méthode de la descente aléatoire

L'une des méthodes de relaxation très usitée dans la minimisation aléatoire est fournie par le procédé suivant de construction de la suite $\{x_k\}$.

Sur une sphère unité de dimension n de centre en origine des coordonnées on choisit un point aléatoire s_k, qui satisfait sur cette sphère à une répartition uniforme, puis on applique la formule (9.7) pour calculer x_{k+1} d'après l'élément x_k fourni par le k-ième pas.

Algorithme 1.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k, \tag{9.7}$$

$$\beta_k : \varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{9.8}$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \min_{\beta} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k, \tag{9.7}$$

$$\beta_k : \varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k \Delta_k s_k) \geqslant \beta_k \Delta_k q_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle, \tag{9.14}$$

$$\beta_k \geqslant 0, \quad 0 < q \leqslant q_k \leqslant \frac{1}{2}, \quad \Delta_k = \operatorname{sign} \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle.$$

Considérons la convergence de la suite $\{x_k\}$ obtenue d'après l'un de ces algorithmes.

Définition. On dit qu'un vecteur aléatoire $s \in E_n$ *est réparti uniformément* sur une surface quarrable S si pour tout sous-ensemble mesurable $S'(S' \subseteq S)$

$$P\{s \in S'\} = \frac{\text{mes } S'}{\text{mes } S}.$$

Le symbole « mes » signifie ici aire.

Soit $S = \{s: \|s\|^2 = 1\}$. Comme dans une transformation orthogonale Q la sphère unité se transforme en elle-même ($QS \equiv S$) et, de plus, mes S' = mes QS' quelle que soit $S' \subseteq S$, alors pour toute matrice orthogonale

Q le vecteur aléatoire Qs est réparti uniformément sur S si sur S est réparti uniformément le vecteur aléatoire s.

Soit $l^T = (l_1, \ldots, l_n)$ un vecteur unité quelconque ($\|l\|^2 = 1$). Dans ce cas, si s est un vecteur aléatoire réparti uniformément sur S, le produit scalaire $\langle l, s\rangle$ est muni de la même loi de répartition que toute composante du vecteur s (par exemple, s_1). En effet, considérons une matrice orthogonale Q, dont la première ligne coïncide avec l^T. Nous avons constaté précédemment que la répartition de Qs est la même que celle de s, c'est-à-dire que la première composante du vecteur Qs égale à $\langle l, s\rangle$ a la même répartition que s_1. Mais la répartition de s_1 ne dépend pas de l; par conséquent, si l est un vecteur unité aléatoire, la répartition conditionnée de $\langle l, s\rangle$ (l étant donné) coïncide avec la répartition inconditionnée de s_1. Cela signifie que $\langle l, s\rangle$ ne dépend pas (dans le sens probabiliste) de l: $P\{\langle l, s\rangle \leqslant \xi | l\} = P\{s_1 \leqslant \xi\}$, $\xi \in E_1$.

Ainsi, la densité de probabilité de la variable aléatoire $\langle l, s\rangle$ coïncide avec la densité de probabilité de la variable aléatoire s_1. Notons cette densité $p_{s_1}(\xi)$, où évidemment $-1 \leqslant \xi \leqslant +1$. De la sorte

$$p_{s_1}(\xi)\, d\xi = P\{\xi < s_1 \leqslant \xi + d\xi\} + o(d\xi), \quad |\xi| < 1.$$

Mais $P\{\xi < s_1 \leqslant \xi + d\xi\} = P\{s \in S'\}$, où S' est un anneau sur la sphère S entre les plans d'équations $s_1 = \xi$ et $s_1 = \xi + d\xi$ (fig. 9.2). L'aire de la sphère de rayon

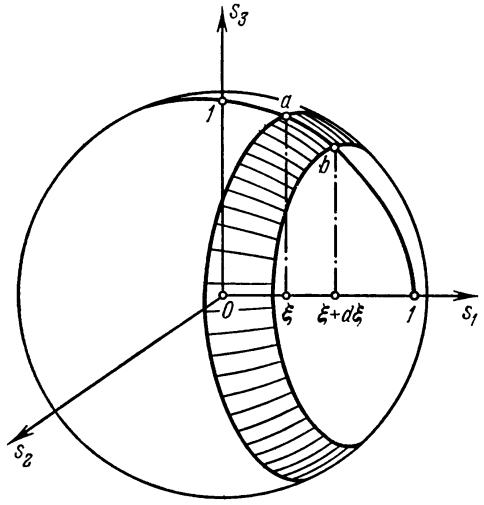

Fig. 9.2

r dans un espace de dimension m est $C_m r^{m-1}$, où C_m est une constante. De cette façon, mes $S = C_n$ et la surface d'une sphère de rayon $\sqrt{1-\xi^2}$ dans un espace de dimension $n-1$ est $C_{n-1}(1-\xi^2)^{(n-2)/2}$. Mais c'est précisément cette sphère qui sert de « base » à l'anneau S' sur la sphère unité S. On en tire

$$\text{mes}\, S' = C_{n-1}(1-\xi^2)^{(n-2)/2} \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} + o(d\xi).$$

Ainsi,

$$P\{\xi < s_1 \leqslant \xi + d\xi\} = P\{s \in S'\} = \frac{\text{mes } S'}{\text{mes } S} = \frac{C_{n-1}}{C_n}(1-\xi^2)^{(n-3)/2}\,d\xi + o(d\xi)$$

ou, ce qui revient au même, $p_{s_1}(\xi)\,d\xi = C(1-\xi^2)^{(n-3)/2}\,d\xi$, où C ne dépend pas de ξ étant défini par la condition

$$\int_{-1}^{+1} p_{s_1}(\xi)\,d\xi = 1.$$

Cherchons maintenant la densité de probabilité $p_{s_1^2}(\xi)$ de la variable aléatoire $s_1^2 (0 < \xi < 1)$. Comme

$$p_{s_1^2}(\xi)\,d\xi = P\{\xi < s_1^2 \leqslant \xi + d\xi\} + o(d\xi)$$

et la répartition de s_1 est symétrique par rapport à zéro $(p_{s_1}(\xi) = p_{s_1}(-\xi))$, il vient

$$\begin{aligned} p_{s_1^2}(\xi)\,d\xi &= 2P\{\sqrt{\xi} < s_1 \leqslant \sqrt{\xi + d\xi}\} + o(d\xi) = \\ &= 2P\left\{\sqrt{\xi} < s_1 \leqslant \sqrt{\xi} + \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}\right\} + o(d\xi) = \\ &= 2p_{s_1}(\sqrt{\xi})\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} + o(d\xi) = C\xi^{-1/2}(1-\xi)^{(n-3)/2}\,d\xi + o(d\xi). \end{aligned}$$

Autrement dit, $p_{s_1^2}(\xi) = C\xi^{-1/2}(1-\xi)^{(n-3)/2}$. Mais*)

$$\int_0^1 \xi^{-1/2}(1-\xi)^{(n-3)/2}\,d\xi = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

on obtient donc finalement

$$p_{s_1^2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\xi^{-1/2}(1-\xi)^{(n-3)/2}, \quad 0 < \xi < 1,$$

et comme nous l'avons vu,

$$p_{s_1^2}(\xi) = p_{s_2^2}(\xi) = \ldots = p_{s_n^2}(\xi).$$

*) Pour les fonctions gamma Γ et bêta B, cf. p. 162.

Etant donné que les moments d'ordre m de la variable aléatoire s_i^2 sont

$$\mathrm{E}(s_i^2)^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 \xi^{m-1/2}(1-\xi)^{(n-3)/2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} B\left(m+\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, en particulier,

$$\mathrm{E}s_i^2 = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{E}(s_i^2)^2 = \frac{3}{n(n+2)}.$$

Maintenant rien de plus facile que de calculer la variance de s_i^2 :

$$\mathrm{Var}\, s_i^2 = \mathrm{E}(s_i^2)^2 - (\mathrm{E}s_i^2)^2 = \frac{2(n-1)}{n^2(n+2)}.$$

Soient $\boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_k, \ldots$ une suite de vecteurs unité aléatoires et $\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_k, \ldots$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants à répartition uniforme sur la sphère unité S (les suites $\{\boldsymbol{l}_k\}$ et $\{\boldsymbol{s}_k\}$ sont supposées indépendantes). Notons $\alpha_k = \langle \boldsymbol{l}_k, \boldsymbol{s}_k \rangle$. Les raisonnements précédents conduisent au théorème suivant.

Théorème 9.10. *Les variables aléatoires* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \ldots$ *sont indépendantes, le carré de chacune d'elles est réparti avec une densité* $ps_1^2(\xi)$ *et*

$$\mathrm{E}\alpha_k^2 = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{Var}\,\alpha_k^2 = \frac{2(n-1)}{n^2(n+2)} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Nous avons déjà utilisé certaines propriétés des fonctions gamma :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1}e^{-z}\, dz$$

et des fonctions bêta :

$$B(a, b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\, dz$$

connues depuis le cours de l'Analyse. En particulier, nous avons utilisé le fait que

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Théorème 9.11. *Si*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe appartenant à la classe* $C^{1,1}(E_n)$;

2) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_k\}$ *est une suite qui se construit soit d'après l'algorithme* 1, *soit d'après l'algorithme* 2, *alors, quel que soit* τ *réel, on a pour* $m \to \infty$ *l'estimation*

$$P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \mu_0\left[1+C\mu_0\frac{m}{n}\left(1-\tau\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right)\right]^{-1}\right\} \geqslant \Phi(\tau) = o(1),$$

où $C \leqslant \frac{\lambda}{2L\eta^2}$ *dans le cas de l'algorithme* 1 *et* $C \leqslant \frac{q}{L\eta^2}$ *dans le cas de l'algorithme* 2, *alors que*

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(1/2)y^2}\,dy$$

est une fonction de répartition normale.

Démonstration. Comme toujours

$$\alpha_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle \varphi'(x_k),\, s_k\rangle}{\|\varphi'(x_k)\|\,\|s_k\|}.$$

Des propositions démontrées (si l'on pose

$$l_k = \frac{1}{\|\varphi'(x_k)\|}\varphi'(x_k))$$

il s'ensuit que les variables aléatoires $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \ldots$ sont indépendantes, réparties de la même façon dans l'intervalle (0, 1), et de plus

$$\mathrm{E}\alpha_k^2 = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \operatorname{Var}\alpha_k^2 = \frac{2(n-1)}{n^2(n+2)}.$$

D'après le théorème limite central

$$P\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2 - \mathrm{E}\alpha_k^2 > -\tau\left(\frac{1}{m}\operatorname{Var}\alpha_k^2\right)^{1/2}\right\} = \Phi(\tau)+o(1)$$
$$(m \to \infty).$$

Dans notre cas, cette relation se met sous la forme

$$P\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2 - \frac{1}{n} > -\frac{\tau}{n}\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right\} = \Phi(\tau)+o(1)$$
$$(m \to \infty).$$

Les transformations élémentaires amènent

$$P\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2 > \frac{m}{n}\left(1-\tau\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right)\right\} = P\left\{1+C\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2 > \right.$$
$$\left. > 1+C\mu_0\frac{m}{n}\left(1-\tau\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right)\right\} = P\left\{\mu_0\left[1+C\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2\right]^{-1} <\right.$$
$$\left. < \mu_0\left[1+C\mu_0\frac{m}{n}\left(1-\tau\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right)\right]^{-1}\right\} = \Phi(\tau)+o(1)$$
$$(m \to \infty).$$

Les théorèmes 9.4 et 9.6 entraînent que

$$P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0\left[1+C\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^2\right]^{-1}\right\} = 1,$$

où $C \leqslant \frac{\lambda}{2L\eta^2}$ dans le cas de l'algorithme 1 et $C \leqslant \frac{q}{L\eta^2}$ dans le cas de l'algorithme 2. En appliquant les propriétés (9.28) et (9.29), on obtient finalement

$$P\left\{\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \mu_0\left[1+C\mu_0\frac{m}{n}\left(1-\tau\sqrt{\frac{2(n-1)}{m(n+2)}}\right)\right]^{-1}\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \Phi(\tau)+o(1) \quad (m \to \infty).$$

Remarque 1. La constante C de cette dernière estimation est n fois plus grande que celle de l'estimation relative à la rapidité avec laquelle converge la méthode du gradient et n fois plus petite que celle de l'estimation relative à la rapidité avec laquelle converge la méthode séquentielle aléatoire.

Remarque 2. Si la fonction $\varphi(x)$ est fortement convexe, on montre sans peine en appliquant la même méthodologie que $x_m \to x^*$ suivant une loi exponentielle avec une probabilité qui tend vers l'unité pour $m \to \infty$.

9.11. Convergence des méthodes de relaxation des problèmes non convexes

Nous avons déjà vu dans le cas de la fonction $\varphi(x)$ convexe appartenant à la classe $C^{1,1}(E_n)$ que pour la plupart des méthodes de minimisation examinées on parvient à évaluer la rapidité de convergence. On voudrait savoir maintenant quelles sont les conditions à imposer à une fonction non convexe $\varphi(x)$ pour que les méthodes de descente restent convergentes. Il s'agit là, certes, non pas d'évaluer la rapidité de convergence, mais d'établir seulement le fait que la procédure converge.

Supposons que $\varphi(x)$ est une fonction continue et que $X^* = \{x^*: \varphi(x^*) = \min \varphi(x)\}$ est un ensemble fermé non vide. Notons $p = p(x)$ la projection du point x sur l'ensemble X^* :

$$\varrho(x, X^*) \overset{\text{def}}{=} \|p-x\| = \min_{x^* \in X^*}\|x^*-x\|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ déterminons l'ensemble

$$U_\varepsilon = \{x: \varrho(x, X^*) \leqslant \varepsilon\}.$$

Supposons que $\{x_k\}$ est une suite telle que

$$\varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k)$$
$$(k = 0, 1, \ldots).$$

Théorème 9.12. *Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que tout x_k n'appartenant pas à U_ε vérifie l'inégalité*

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \eta,$$

il existe alors un indice $k_0 = k_0(\eta)$ *tel que* $x_k \in U_\varepsilon$ $(k \geqslant k_0+1)$ *et par conséquent*

$$\lim_{i \to \infty} \varrho(x_k, X^*) = 0.$$

Démonstration. Puisque $\{\varphi(x_k)\}$ est une suite convergente (étant monotone et bornée inférieurement par le nombre $\varphi(x^*)$), il existe un indice $k_0 = k_0(\eta)$ tel que pour tout $k \geqslant k_0+1$ on ait

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) < \eta$$

et, par conséquent, $x_k \in U_\varepsilon$ $(k \geqslant k_0+1)$.

Considérons la procédure générale des méthodes de descente

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

où x_0 est un point quelconque de E_n, et s_k la direction en x_k dont les modes de choix déterminent la différence entre les méthodes. Le nombre β_k se calcule d'après les relations

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1-\lambda_k)\,\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$
$$\omega_k = \inf_{\beta} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions:

1) $\varphi(x) \in C^{1,1}(E_n)$;

2) *quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que* $\|\varphi'(x)\| \geqslant \delta$ *pour tout* $x \notin U_\varepsilon$.

Ces conditions signifient que la fonction $\varphi(x)$ lisse au sens de $C^{1,1}$, minimisée dans l'espace E_n (condition d'un ensemble X^* non vide), ne possède pas de minimums locaux (condition 2). Et qui plus est, la condition 2 impose des contraintes même à la classe des fonctions convexes.

Les relations qui déterminent la variable β_k et la condition 1 conduisent, compte tenu du lemme 9.3 (cf. 9.10), à l'estimation

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L} \lambda \alpha_k^2 \|\varphi'(x_k)\|^2. \tag{9.32}$$

Théorème 9.13. *Si la direction* s_k *est choisie de façon que* $\alpha_k^2 \geqslant \alpha^2 > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *alors*

$$\lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, X^*) = 0$$

et

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Démonstration. De la condition 2 et de l'estimation précédente il résulte que quel que soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $x_k \notin U_\varepsilon$

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \eta,$$

où

$$\eta = \frac{\lambda\alpha^2\delta^2}{2L},$$

et donc, d'après le théorème précédent,

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(x_k, X^*) = 0.$$

En utilisant la formule des accroissements finis, on obtient

$$\varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi(x_k)-\varphi(p(x_k)) \leqslant \|\varphi'(\tilde{x})\| \, \|x_k - p(x_k)\|,$$

où $\tilde{x}\in[x_k, p(x_k)]$. On en tire, compte tenu de la condition 1 et du fait que $\varphi'(p(x_k)) = 0$, l'inégalité

$$\begin{aligned}\varphi(x_k)-\varphi(x^*) &\leqslant \|\varphi'(\tilde{x})-\varphi'(p(x_k))\| \, \|x_k-p(x_k)\| \leqslant \\ &\leqslant L\|\tilde{x}-p(x_k)\| \, \|x_k-p(x_k)\| \leqslant \\ &\leqslant L\|x_k-p(x_k)\|^2 = L\varrho^2(x_k, X^*). \qquad (9.33)\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Appliquons ce théorème pour établir la convergence de certaines méthodes de minimisation en supposant que $\varphi(x)$ vérifie les conditions 1 et 2.

Méthode du gradient. Ici $s_k = \varphi'(x_k)$ (cf. 9.5). La convergence de la méthode est évidente du fait que $\alpha_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Méthode de la descente aléatoire (cf. 9.10). On choisit comme s_k un point aléatoire de la sphère unité soumis sur cette sphère à une loi de répartition uniforme.

Si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{x_{k_i}\}$ telle que $x_{k_i}\in U_\varepsilon$, alors $\lim\limits_{i\to\infty} \varrho(x_{k_i}, X^*) = 0$ et donc, d'après (9.33), $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi(x_{k_i}) = \varphi(x^*)$. Il s'ensuit en vertu de la convergence de la suite $\{\varphi(x_k)\}$ qu'on a $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*)$.

Supposons qu'une telle suite n'existe pas. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel qu'à partir d'un indice $k_0 = k_0(\varepsilon)$ on ait

$$\varrho(x_k, X^*) > \varepsilon \quad (k = k_0+1, k_0+2, \ldots).$$

Supposons que l'indice $k_1 = k_1(\eta) \geqslant k_0$ est tel que pour tout $k > k_1$ on ait

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) < \eta, \quad \text{où} \quad \eta = \frac{\lambda\delta}{2Ln}.$$

Puisque $x_k \notin U_\varepsilon$, par condition $\|\varphi'(x_k)\| \geqslant \delta$ et en vertu de (9.32), on a l'inégalité

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\lambda\delta\alpha_k^2 \quad (k = k_0+1, k_0+2, \ldots).$$

Mais, d'après la loi de « zéro ou un », la probabilité d'un indice aléatoire $k \geqslant k_0+1$ tel que $\alpha_k^2 \geqslant \alpha > 0$ $\left(\text{pour } \alpha \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ suffisamment petit}\right)$ est égale

à l'unité (cf. théorème 9.10); il en résulte que la probabilité de l'événement

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \eta,$$

qui contredit l'hypothèse, est égale à l'unité. De la sorte

$$P\{\varrho(x_k, X^*) > \varepsilon\} = 0;$$

par suite,

$$P\left\{\lim_{i \to \infty} \varrho(x_{k_i}, X^*) = 0\right\} = 1$$

et

$$P\left\{\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*)\right\} = 1.$$

Méthode séquentielle cyclique. Pour justifier la convergence, renforçons la prescription $\|\varphi'(x)\| \geqslant \delta$ pour $x \notin U_\varepsilon$ par la contrainte suivante. Supposons que dans la suite $\{x_k\}$, où $x_{k+1}=x_k-\beta_k e_{j(k)}$ (cf. 9.8), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une sous-suite $\{x_{k_i}\}$ telle que ses termes n'appartenant pas à U_ε vérifient l'inégalité

$$\left(\frac{\partial\varphi(x_{k_i})}{\partial x_{j(k_i)}}\right)^2 \geqslant \delta > 0.$$

De même qu'au paragraphe 9.7, le lemme 9.3 et la définition de la variable δ donnent pour $x_{k_i} \notin U_\varepsilon$ l'inégalité

$$\varphi(x_{k_i})-\varphi(x_{k_i+1}) \geqslant \varphi(x_{k_i})-\varphi(x_{k_i+1}) \geqslant \frac{\lambda\delta}{2L} = \eta > 0,$$

d'où, en vertu du théorème 9.12, on a

$$\lim_{i \to \infty} \varrho(x_{k_i}, X^*) = 0,$$

et donc, d'après (9.33),

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Remarque sur les conditions d'existence des estimations de la rapidité de convergence. Dans le cas où la fonction convexe $\varphi(x)$ vérifie les conditions 1 et 2, sont vraies les estimations de la rapidité de convergence (analogues à celles exposées aux paragraphes 9.4, 9.5, 9.9, 9.10) des méthodes de descente, y compris la méthode du gradient et celle des directions conjuguées, ainsi que des méthodes séquentielle aléatoire et de la descente aléatoire. Les constantes de ces estimations sont différentes, mais l'ordre de la rapidité avec laquelle ces méthodes convergent est toujours le même. Insistons sur le fait que si dans ce qui précède on imposait toujours que l'ensemble

$$X_0 = \{x : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$$

soit borné, dans notre cas cette contrainte est remplacée par la condition 2.

CHAPITRE 10

MÉTHODES DE RELAXATION DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE. PROBLÈMES D'EXTRÉMUM AVEC CONTRAINTES

Dans ce chapitre nous examinerons les méthodes de descente appliquées à la minimisation d'une fonction convexe $\varphi(x)$ dérivable sur un ensemble convexe fermé X.

Dans les méthodes de descente appliquées aux problèmes de minimisation sans contrainte la recherche de la direction de descente ne présentait pas de difficultés de principe. Le plus difficile dans les calculs était de réaliser la descente elle-même dans le sens d'une direction déjà établie, c'est-à-dire une minimisation unidimensionnelle (conditions (9.8)), ou bien de résoudre un problème apparenté (conditions (9.14)). Dans les problèmes avec contraintes le choix de la direction impose dans la plupart des méthodes la résolution des problèmes beaucoup plus difficiles que la minimisation unidimensionnelle (sauf dans des problèmes où l'ensemble X est d'une structure géométrique simple, par exemple, un parallélépipède multidimensionnel). Il en est ainsi du fait qu'en x_k il faut premièrement que la direction de la descente $-s_k$ soit admissible, c'est-à-dire telle que de faibles déplacements dans ce sens à partir de x_k n'obligent pas à dépasser l'ensemble X, et, deuxièmement, que son choix assure la convergence du processus.

Dans ce qui suit nous examinons les méthodes de relaxation les plus usitées pour résoudre des problèmes de programmation mathématique, tout en étudiant leur convergence et leur stabilité.

10.1. Méthode de linéarisation (de type Frank et Wolfe)

Dans cette méthode l'idée du choix de la direction de descente consiste à linéariser en x_k la fonction $\varphi(x)$ en construisant une fonction linéaire $\varphi_L(x) = \varphi(x_k) + \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle$ et puis à minimiser $\varphi_L(x)$ sur l'ensemble X pour chercher le point y_k. Ensuite, on adopte $-s_k = y_k - x_k$ et puis dans cette direction on réalise la descente. De cette façon, la recherche de la direction $-s_k$ consiste à minimiser une fonction linéaire sur un ensemble X. Dans le cas général, ce problème est aussi complexe que le problème initial ; pourtant, lorsque l'ensemble admissible est donné par des contraintes linéaires, il se transforme en un problème de programmation linéaire dont les méthodes de résolution à dimension finie ont été examinées au chapitre 5.

Avant d'étudier les algorithmes concrets, considérons la procédure suivante assez générale de construction d'une suite minimisante $\{x_k\}$.

La construction démarre d'un point arbitraire $x_0 \in X$. Supposons qu'on ait déjà trouvé l'élément $x_k \in X$. Pour construire l'élément

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k) \in X \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10.1}$$

il faut définir y_k et β_k. Admettons pour y_k que

$$y_k \in X, \tag{10.2}$$

$$\| x_k - y_k \| \leqslant \varkappa < \infty \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10.3}$$

et, de plus, que

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10.4}$$

Supposons que β_k vérifie les inégalités

$$\varphi[x_k - \beta_k(x_k - y_k)] \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \tag{10.5}$$

où

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0, 1]} \varphi[x_k - \beta(x_k - y_k)].$$

Théorème 10.1. *Si sur un ensemble X convexe et fermé :*

1) *$\varphi(x)$ est une fonction convexe appartenant à la classe $C^{1,1}(X)$;*

2) *il existe $x^* \in X$ tel que $\min_{x \in X} \varphi(x) = \varphi(x^*)$;*

3) *$\| \varphi'(x) \| \leqslant \gamma < \infty$ pour tout $x \in X$;*

4) *$\{x_k\}$ est une suite définie par les conditions* (10.1)-(10.5), *alors l'estimation*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 C \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle^2}{\langle \varphi'(x_k), x_k - x^* \rangle^2} \right]^{-1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots) \tag{10.6}$$

est vraie quel que soit le nombre positif

$$C \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2\varkappa} \min \left\{ \frac{1}{\gamma}, \frac{\varepsilon_1}{\varkappa} \right\}, \quad \text{où} \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{2 - \varepsilon_2}{L}, \quad 0 < \varepsilon_2 < 2.$$

Démonstration. Les conditions (10.5) et le lemme 9.3 entraînent l'inégalité suivante vraie pour tout $\beta \in [0, 1]$:

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k [\varphi(x_k) - \omega_k] \geqslant \lambda_k \{\varphi(x_k) - \varphi[x_k - \beta(x_k - y_k)]\} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_k \left[\beta \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle - \frac{1}{2} L \beta^2 \| x_k - y_k \|^2 \right]. \tag{10.7}$$

En particulier, cette inégalité est vraie pour

$$\beta = \min \left\{ 1, \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle}{\| x_k - y_k \|^2} \right\}, \tag{10.8}$$

où

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant \varrho_k \leqslant \frac{2-\varepsilon_2}{L}, \quad \varepsilon_1 < \frac{2-\varepsilon_2}{L}, \quad 0 < \varepsilon_2 < 2. \tag{10.9}$$

Considérons deux possibilités.

Si $\beta = 1$, on tire de (10.8)

$$\| x_k - y_k \|^2 \leqslant \varrho_k \langle \varphi'(x_k), \quad x_k - y_k \rangle.$$

Compte tenu de (10.3) et de la condition 3), ce fait amène avec (10.7) l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} L \varrho_k\right) \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_k \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \frac{1}{2} \lambda_k \varepsilon_2 \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle^2}{\| \varphi'(x_k) \| \, \| x_k - y_k \|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \lambda_k \frac{\varepsilon_2}{\gamma \varkappa} \langle \varphi'(x_k), \quad x_k - y_k \rangle^2. \tag{10.10}$$

Si

$$\beta = \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), \quad x_k - y_k \rangle}{\| x_k - y_k \|^2},$$

on obtient de (10.7), compte tenu des conditions qui déterminent ϱ_k, que

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \varrho_k \left(1 - \frac{1}{2} L \varrho_k\right) \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle^2}{\| x_k - y_k \|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \lambda_k \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varkappa^2} \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle^2. \tag{10.11}$$

Soit

$$0 < C \leqslant \min \left\{ \frac{\varepsilon_2}{2\gamma\varkappa}, \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2\varkappa^2} \right\}.$$

Alors, (10.10) et (10.11) conduisent à l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant C \lambda_k \langle \varphi'(x_k), \quad x_k - y_k \rangle^2.$$

Puisque les conditions de ce théorème justifient également le théorème 9.1, la dernière égalité et l'estimation (9.2) impliquent (10.6).

Remarque. Les conditions 2) et 3) du théorème 10.1 et la condition (10.3) peuvent être remplacées en imposant à l'ensemble convexe X la contrainte d'être borné et fermé.

Corollaire 1. *Si dans les conditions du théorème* 10.1 *le point* y_k *est tel que*

$$\langle \varphi'(x_k), \quad x_k - y_k \rangle \geqslant \sigma_k \langle \varphi'(x_k), \quad x_k - x^* \rangle, \quad \sigma_k > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{10.12}$$

(10.6) *entraîne l'estimation*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 C \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \sigma_k^2 \right]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{10.13}$$

Lorsqu'on cherche le point y_k, les conditions (10.12) permettent d'obtenir une solution approchée du problème

$$\min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle.$$

La précision de cette solution approchée est alors caractérisée par la quantité σ_k.

Si dans les conditions (10.5) et (10.12) λ_k et σ_k sont tels que $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$ et $\sigma_k \geqslant \sigma > 0$, alors (10.13) conduit à l'inégalité

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 [1 + \mu_0 C \lambda \sigma^2 m]^{-1} < \frac{1}{C\lambda\sigma^2} \frac{1}{m} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{10.14}$$

Corollaire 2. *Si dans les conditions du théorème* 10.1 *le paramètre* β_k *est défini non par les relations* (10.5) *mais par les conditions* (10.8), (10.9), *les estimations* (10.6), (10.13) *et* (10.14) *restent vraies pour* $\lambda_k = 1$.

Supposons dans ce qui suit que l'ensemble convexe et fermé X soit borné. Dans tous les algorithmes connus de la méthode de linéarisation le point y_k s'obtient en résolvant le problème d'extrémum suivant:

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle = - \min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle. \tag{10.15}$$

Algorithme 1.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k (x_k - y_k), \tag{10.1}$$

$$y_k : \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle = - \min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle, \tag{10.15}$$

$$\beta_k : \varphi[x_k - \beta_k (x_k - y_k)] \leqslant (1 - \lambda_k) \varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k,$$

$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \min_{\beta \in [0, 1]} \varphi[x_k - \beta(x_k - y_k)]. \tag{10.5}$$

Ici ω_k est la valeur minimale de la fonction $\varphi(x)$ sur le segment $[x_k, y_k]$. Constatons que dans tout ce qui suit ω_k peut être défini par la condition

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0, \zeta_k]} \varphi[x_k - \beta(x_k - y_k)],$$

où

$$\zeta_k = \max_{\beta \in B_k} \beta \geqslant 1, \quad B_k = \{\beta \geqslant 0 : x_k - \beta(x_k - y_k) \in X\}.$$

Dans ces conditions, tous les résultats ultérieurs restent valables. Toutefois, pratiquement, les efforts supplémentaires pour trouver la grandeur ζ_k ne se justifient pas.

Convergence. Toutes les conditions du théorème 10.1 et du premier corollaire étant remplies pour $\sigma_k = 1$, il résulte de (10.14) l'estimation

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 [1 + \mu_0 C \lambda m]^{-1} < \frac{1}{C\lambda m}$$

$$(m = 1, 2, \ldots). \tag{10.16}$$

Stabilité. Si y_k vérifie la condition

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant -\sigma_k \min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \tag{10.17}$$

pour $0 < \sigma_k \leqslant 1$, alors que λ_k est défini par les relations (10.5), on obtient du corollaire 1, puisque la condition (10.12) est observée, que l'estimation (10.13) est vraie et pour $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$ et $\sigma_k \geqslant \sigma > 0$ on respecte l'inégalité (10.14). Par suite, la méthode est stable aux erreurs de calcul éventuelles dans les limites permises par les relations (10.17) et (10.5).

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k), \tag{10.1}$$

$$y_k\colon \langle \varphi(x_k), x_k - y_k \rangle = -\min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle, \tag{10.15}$$

$$\beta_k = \min \left\{ 1, \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle}{\| x_k - y_k \|^2} \right\}, \tag{10.8}$$

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant \varrho_k \leqslant \frac{2 - \varepsilon_2}{L}. \tag{10.9}$$

Convergence. On tire du corollaire 2 les estimations de la rapidité de convergence (10.13) et (10.14) pour $\sigma_k = 1$, vraies pour cet algorithme.

Stabilité. Si y_k vérifie la condition (10.17) et donc (10.12), les corollaires 1 et 2 justifient alors les estimations (10.13) et (10.14) pour $\lambda_k = 1$. Ainsi, la méthode est stable aux erreurs de calcul éventuelles.

Algorithme 3.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k), \tag{10.1}$$

$$y_k\colon \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant -\sigma_k \min_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle,$$

$$0 < \sigma_k \leqslant 1, \tag{10.17}$$

$$\beta_k\colon \varphi(x_k) - \varphi[x_k - \beta_k(x_k - y_k)] \geqslant q\beta_k \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle,$$

$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < q < 1, \tag{10.18}$$

où β_k est le plus grand nombre vérifiant ces conditions.

Montrons d'abord qu'il existe des β_k qui satisfont aux conditions (10.18). Soit β_k défini par les relations (10.8), (10.9). Si on reprend les calculs de la démonstration du théorème 10.1 à partir de l'inégalité (10.7) avec $\lambda_k = 1$, on obtient pour $\beta_k = 1$ (d'une façon analogue à (10.10))

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \beta_k \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle.$$

Et pour

$$\beta_k = \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle}{\| x_k - y_k \|^2}$$

on obtient d'une façon analogue à (10.11)

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \varrho_k\left(1-\frac{1}{2}L\varrho_k\right)\frac{\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle^2}{\|x_k-y_k\|^2} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}L\varrho_k\right)\beta_k\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_2\beta_k\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle.$$

Puisque ε_2 doit satisfaire à l'inégalité $0 < \varepsilon_2 < 2$, la condition (10.18) est remplie quel que soit $0 < q \leqslant \varepsilon_2/2 < 1$.

Convergence. (10.17) et (10.18) impliquent l'inégalité

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant q\beta_k\sigma_k \max_{x\in X}\langle\varphi'(x_k),\, x_k-x\rangle \geqslant$$

$$\geqslant q\beta_k\sigma_k\langle\varphi'(x_k),\, x_k-x^*\rangle.$$

On en tire avec (9.2) l'estimation

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0\left[1+\mu_0 q\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\beta_k\sigma_k}{\langle\varphi'(x_k),\, x_k-x^*\rangle}\right]^{-1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots). \tag{10.19}$$

Soit $\bar{\beta}_k$ le plus grand nombre vérifiant les conditions (10.18), et $\beta_k = \tau_k\bar{\beta}_k$, où $0 < \tau_k \leqslant 1$. Dans ce cas, pour $\bar{\beta}_k = 1$, on a

$$\frac{\beta_k\sigma_k}{\langle\varphi'(x_k),\, x_k-x^*\rangle} \geqslant \frac{\tau_k\bar{\beta}_k\sigma_k}{\|\varphi'(x_k)\|\,\|x_k-x^*\|} \geqslant \frac{\tau_k\sigma_k}{\gamma\varkappa} \geqslant \frac{\tau_k\sigma_k^2}{\gamma\varkappa},$$

où

$$\gamma = \max_{x\in X}\|\varphi'(x)\|, \quad \text{et} \quad \varkappa = \operatorname{diam} X.$$

Mais si $1 > \bar{\beta}_k \geqslant \varrho_k\dfrac{\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle}{\|x_k-y_k\|^2}$, il vient

$$\bar{\beta}_k \geqslant \frac{\varepsilon_1}{\varkappa^2}\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle \geqslant \frac{\varepsilon_1\sigma_k}{\varkappa^2}\langle\varphi'(x_k),\, x_k-x^*\rangle$$

et c'est pourquoi $\dfrac{\beta_k\sigma_k}{\langle\varphi'(x_k),\, x_k-y_k\rangle} \geqslant \dfrac{1}{\varkappa^2}\varepsilon_1\tau_k\sigma_k^2$.

Finalement, (10.19) donne l'estimation

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) \leqslant \mu_0\left[1+\mu_0 C\sum_{k=0}^{m-1}\tau_k\sigma_k^2\right]^{-1} <$$

$$< \left[C\sum_{k=0}^{m-1}\tau_k\sigma_k^2\right]^{-1}$$

$$(m = 1, 2, \ldots), \tag{10.20}$$

vraie pour tout $0 < C \leqslant q\min\left\{\dfrac{1}{\gamma\varkappa}, \dfrac{\varepsilon_1}{\varkappa^2}\right\}$. Ainsi pour $0 < \tau \leqslant \tau_k \leqslant 1$ et $0 < \sigma \leqslant \sigma_k \leqslant 1$, on aboutit à l'inégalité

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \frac{1}{C\tau\sigma^2 m} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{10.21}$$

Stabilité. Elle est évidente d'après les estimations susmentionnées.

Cas d'un ensemble X non borné. Dans les algorithmes précédents nous avons supposé qu'il existe une solution du problème d'extrémum (10.15), c'est-à-dire d'un problème qui consiste à choisir une direction. Or, ceci rétrécit sensiblement la classe des problèmes autorisant l'application de la méthode de linéarisation. Considérons un algorithme affranchi de cette contrainte, c'est-à-dire qui admet que l'ensemble X ne soit pas borné.

Algorithme 4.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k), \tag{10.1}$$

$$y_k\colon \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k\rangle \geqslant \min\{-\sigma_k \inf_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k\rangle, \alpha_k\},$$

$$0 < \sigma \leqslant \sigma_k \leqslant 1, \quad 0 < \alpha \leqslant \alpha_k < \infty, \tag{10.22}$$

$$\beta_k\colon \varphi[x_k - \beta_k(x_k - y_k)] \leqslant (1-\lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{10.5}$$

$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0,1]} \varphi[x_k - \beta(x_k - y_k)].$$

Le sens des conditions 10.22 est explicité au point « discussion ».

Dans ce qui suit, les estimations de la rapidité de convergence expliquent comment on choisit les grandeurs α_k.

Convergence. Supposons que

$$\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty,$$

où $X_0 = \{x \in X : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$, et qu'il existe un nombre $\varkappa$ tel que

$$\| x_k - y_k \| \leqslant \varkappa < \infty \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Si

$$-\sigma_k \inf_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k\rangle \leqslant \alpha_k,$$

on obtient de (10.22) l'inégalité

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k\rangle \geqslant \sigma_k \langle \varphi'(x_k), x_k - x^*\rangle.$$

Mais si

$$-\sigma_k \inf_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k\rangle > \alpha_k,$$

on a

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k\rangle \geqslant \alpha_k \geqslant \frac{\alpha_k}{\eta\gamma} \langle \varphi'(x_k), x_k - x^*\rangle \geqslant \frac{\alpha}{\eta\gamma} \langle \varphi'(x_k), x_k - x^*\rangle,$$

où $\gamma = \max_{x \in X_0} \| \varphi'(x) \|$.

Soit

$$\varepsilon = \min\left\{\sigma, \frac{\alpha}{\eta\gamma}\right\};$$

alors y_k vérifie la relation

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \varepsilon \langle \varphi'(x_k), x_k - x^* \rangle.$$

Cette dernière et l'estimation (10.6) conduisent avec $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$ à l'inégalité

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 [1 + \mu_0 C m]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où

$$C \leqslant \frac{\varepsilon^2 \lambda \varepsilon_2}{2\varkappa} \min \left\{ \frac{1}{\gamma}, \frac{\varepsilon_1}{\varkappa} \right\}.$$

Discussion. Il est clair que C en diminuant dégrade l'estimation *a priori* de la convergence de cette méthode. Pour élucider la question du choix de α_k évaluons la grandeur C ; sous certaines hypothèses naturelles*) on a l'inégalité

$$C \leqslant C_1 \frac{\alpha^2}{\varkappa^2},$$

où $C_1 = \text{const} > 0$. Comme la quantité $\|x_k - y_k\|$ dépend du choix de α, et donc $\varkappa$ dépend de α, les relations qui évaluent C montrent qu'il est avantageux de choisir α_k tel que la relation $\frac{\alpha_k^2}{\|x_k - y_k\|^2}$ ne décroisse pas avec l'augmentation de l'indice k.

Examinons un cas plus prometteur pour l'application de la méthode de linéarisation, plus précisément celui d'un ensemble X donné par un système d'égalités et d'inégalités linéaires, et lorsque la recherche de y_k à partir des conditions (10.17) devient un problème de programmation linéaire. Dans le problème de la recherche de y_k qui dans notre cas est un problème de programmation linéaire, les conditions (10.17) et (10.22) permettent de se borner à quelques pas simpliciaux, par exemple, en mettant fin à la procédure simpliciale dès que (10.17) ou (10.22) commencent à être remplies.

10.2. Méthode du gradient projeté

Comme nous l'avons déjà dit, dans les problèmes de minimisation unidimensionnelle, une méthode de relaxation très usitée est celle du gradient. Pourtant il se peut que pour des problèmes avec contraintes, la direction de la descente dans le sens de l'antigradient soit impossible. Pour rechercher une direction admissible en x_k l'idée qui se présente à l'esprit est celle de projeter le point $v_k = x_k - \nu_k \varphi'(x_k)$ (ν_k est un nombre positif fixe) sur l'ensemble X et adopter comme direction de la descente $-s_k = p(v_k) - x_k$, où $p(v_k)$ est la projection de v_k sur X, après quoi réaliser la descente dans cette direction.

*) Par exemple, pour $\varkappa > 1$, $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{\gamma}$ et $\frac{\alpha}{\eta\gamma} < 1$.

Ainsi, la méthode du gradient projeté consiste à calculer la projection $p(v_k)$ du point

$$v_k = x_k - \nu_k \varphi'(x_k)$$

sur l'ensemble X et à construire le point

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k [x_k - p(v_k)], \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1. \tag{10.23}$$

Pour chercher la direction $s_k = x_k - p(v_k)$, il faut minimiser la fonction quadratique $\| v_k - x \|^2$ sur l'ensemble X. Dans le cas général, ce problème est aussi complexe que le problème initial, toutefois pour des problèmes dont la structure géométrique de l'ensemble admissible est simple, par exemple, pour un parallélépipède multidimensionnel, la recherche de $p(v_k)$ se fait en comparant n nombres.

Pour explorer la convergence et la stabilité de différents algorithmes de la méthode du gradient projeté, on se guide sur deux théorèmes des estimations, dont les démonstrations font appel aux propriétés suivantes de la projection d'un point sur un ensemble. On déduit de (2.2) que

$$\langle v_k - p(v_k), x^* - p(v_k) \rangle \leqslant 0. \tag{10.24}$$

Le corollaire du théorème 2.2 entraîne que quel que soit $\nu_k > 0$, on a l'inégalité

$$\nu_k \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k) \rangle \geqslant \| x_k - p(v_k) \|^2. \tag{10.25}$$

Rappelons enfin que si $\varphi(x)$ est une fonction convexe et dérivable sur un ensemble X convexe et fermé, la condition $x_k = p(v_k)$ implique la propriété d'extrémalité du point x_k (théorème 2.16). En étudiant la convergence, nous supposerons toujours que $x_k \neq p(v_k)$, c'est-à-dire que $\varphi(x_k) \neq \varphi(x^*)$.

Théorème 10.2. *Si sur un ensemble X convexe et fermé on remplit les conditions*:

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe de la classe* $C^{1,1}(X)$;

2) $X_0 = \{x \in X: \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ *est un ensemble borné*: diam $X_0 = \eta < \infty$;

3) ν_k *sont des nombres tels que* $\nu_k \geqslant \nu' > 0$;

4) $\{x_k\}$ *est une suite relaxative, c'est-à-dire*

$$\varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

alors on vérifie l'estimation

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 C \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| x_k - p(v_k) \|^2} \right]^{-1}$$
$$(m = 1, 2, \ldots) \tag{10.26}$$

quel que soit $0 < C \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu'}\right)^{-2}$, *où* $\gamma = \max\limits_{x \in X_0} \| \varphi'(x) \|$.

Démonstration. Pour obtenir l'inégalité (10.26) il suffit de mon-

trer que

$$\langle \varphi'(x_k),\ x_k - x^* \rangle \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu'}\right) \| x_k - p(v_k) \|,$$

et utiliser l'estimation (9.2) du théorème 9.1.

Procédons d'abord aux transformations identiques suivantes :

$$\langle \varphi'(x_k),\ x_k - x^* \rangle = \langle \varphi'(x_k),\ x_k - p(v_k) \rangle + \langle \varphi'(x_k),\ p(v_k) - x^* \rangle =$$

$$= \langle \varphi'(x_k),\ x_k - p(v_k) \rangle + \frac{1}{\nu_k} \langle v_k - p(v_k),\ x^* - p(v_k) \rangle -$$

$$- \frac{1}{\nu_k} \langle x_k - p(v_k),\ x^* - p(v_k) \rangle.$$

Ces expressions et (10.24) donnent

$$\langle \varphi'(x_k),\ x_k - x^* \rangle \leqslant \langle \varphi'(x_k),\ x_k - p(v_k) \rangle - \frac{1}{\nu_k} \langle x_k - p(v_k),\ x^* - p(v_k) \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| \varphi'(x_k) \| + \frac{1}{\nu_k} \| x^* - p(v_k) \| \right) \| x_k - p(v_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| \varphi'(x_k) \| + \frac{1}{\nu_k} \| x^* - x_k \| + \frac{1}{\nu_k} \| x_k - p(v_k) \| \right) \| x_k - p(v_k) \|.$$

Mais (10.25) entraîne l'inégalité

$$\frac{1}{\nu_k} \| x_k - p(v_k) \| \leqslant \| \varphi'(x_k) \|.$$

Compte tenu du fait que $\| x^* - x_k \| \leqslant \eta$ et $\| \varphi'(x_k) \| \leqslant \gamma$, on obtient finalement

$$0 \leqslant \langle \varphi'(x_k),\ x_k - x^* \rangle \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu_k}\right) \| x_k - p(v_k) \| \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu'}\right) \| x_k - p(v_k) \|.$$

De là et de l'inégalité (9.2)

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\langle \varphi'(x_k),\ x_k - x^* \rangle^2} \right]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

on déduit l'estimation (10.26). Le théorème est démontré.

Considérons maintenant une suite $\{x_k\}$ dont les éléments se construisent suivant la formule

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k (x_k - y_k), \tag{10.27}$$

alors que y_k et β_k satisfont aux conditions

$$y_k \in X, \tag{10.28}$$

$$\varphi[x_k - \beta_k (x_k - y_k)] \leqslant (1 - \lambda_k) \varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 < \lambda_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \tag{10.29}$$

où

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0,\ 1]} \varphi[x_k - \beta (x_k - p(v_k))].$$

Soulignons que pour construire les éléments de $\{x_k\}$, le choix de y_k et β_k est assez arbitraire pourvu qu'on respecte les contraintes (10.28) et (10.29).

Théorème 10.3. *Si sur un ensemble X convexe et fermé*

1) $\varphi(x)$ *est une fonction convexe de la classe* $C^{1,1}(X)$;

2) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

3) $\{x_\kappa\}$ *est une suite définie par les conditions* (10.27)-(10.29);

4) v_k *des nombres tels que* $0 < v' \leqslant v_k \leqslant v'' < \infty$, *alors l'estimation*

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 C \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\right]^{-1} < \left[C \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\right]^{-1} \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{10.30}$$

est vraie quel que soit

$$0 < C \leqslant \frac{1}{2v''} \left(2\gamma + \frac{\eta}{v'}\right)^{-2} \min\left\{1, \frac{1}{v''L}\right\}.$$

Démonstration. On obtient du lemme 9.3 et de l'inégalité (10.25) que quels que soient $\beta \in [0, 1]$, on a l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi[x_k - \beta(x_k - p(v_k))] \geqslant \beta\langle\varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle - \frac{1}{2}L\beta^2 \| x_k - p(v_k)\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{v_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2\right) \| x_k - p(v_k)\|^2. \tag{10.31}$$

On déduit avec la condition (10.29) que quel que soit $\beta \in [0, 1]$, on a l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k) - \omega_k] \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_k \left(\frac{1}{v_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2\right) \| x_k - p(v_k)\|^2. \tag{10.32}$$

En particulier, en choisissant $\beta = \min\left\{1, \frac{1}{v_k L}\right\}$, on obtient pour $\beta = 1$ $\left(\text{compte tenu du fait que dans ce cas } L \leqslant \frac{1}{v_k}\right)$

$$\frac{1}{v_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2 = \frac{1}{v_k} - \frac{1}{2}L \geqslant \frac{1}{2v_k} \geqslant \frac{1}{2v''}.$$

Mais si $\beta = \frac{1}{v_k L} \leqslant 1$, il vient

$$\frac{1}{v_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2 = \frac{1}{2v_k^2 L} \geqslant \frac{1}{2(v'')^2 L}.$$

Finalement, on aboutit à l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \varepsilon \| x_k - p(v_k)\|^2, \tag{10.33}$$

où

$$\varepsilon = \frac{1}{2v''} \min\left\{1, \frac{1}{v''L}\right\}.$$

(10.33) et (10.26) conduisent à l'estimation (10.30).

Considérons maintenant les algorithmes de la méthode du *gradient projeté.*

Algorithme 1.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - p(v_k)), \tag{10.23}$$

$$\beta_k: \quad \varphi(x_{k+1}) = \min_{\beta \in [0, 1]} \varphi[x_k - \beta(x_k - p(v_k))]$$

et, de plus,

$$0 < \nu' \leqslant v_k \leqslant \nu'' < \infty.$$

Convergence. Si sous les conditions (10.27)-(10.29) on pose $y_k = p(v_k)$ et $\lambda_k = 1$, on aboutit à l'algorithme 1. En vertu du théorème 10.3, on obtient de (10.30) l'estimation

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \frac{1}{Cm} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Stabilité. Si au lieu de $p(v_k)$ et β_k l'algorithme 1 donne y_k et β_k satisfaisant aux conditions (10.27)-(10.29), en vertu du théorème 10.3, on a l'estimation (10.30). Et si tout $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$, alors,

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \frac{1}{C\lambda m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Par conséquent, dans les limites du changement de y_k et β_k, permises par les conditions (10.28), (10.29), la rapidité de convergence est toujours du même ordre $O\left(\frac{1}{m}\right)$, bien que le facteur affecté à $\frac{1}{m}$ de l'estimation de cette rapidité devient $\frac{1}{\lambda}$ fois plus grand.

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - p(v_k)). \tag{10.23}$$

On choisit comme β_k n'importe quel nombre respectant la condition

$$0 < \bar{\beta} \leqslant \beta_k \leqslant 1,$$

alors que la grandeur v_k peut être quelconque, mais telle que

$$0 < \nu' \leqslant v_k \leqslant \nu'' < \frac{2}{L}.$$

Convergence. En tenant compte des conditions qui déterminent β_k et v_k, on obtient de (10.31)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \bar{\beta}\left(\frac{1}{\nu''} - \frac{1}{2}L\right) \| x_k - p(v_k) \|^2.$$

L'estimation (10.26) conduit maintenant à l'inégalité

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \frac{1}{Cm} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où

$$0 < C \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu'}\right)^{-2} \bar{\beta}\left(\frac{1}{\nu''} - \frac{1}{2}L\right).$$

Stabilité. Si pour un certain $\beta_k \in [\bar{\beta}, 1]$ on a trouvé au lieu de $\boldsymbol{p}(v_k)$ l'élément y_k qui satisfait à la condition (10.29), il résulte de (10.32) pour $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$ que

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \bar{\beta}\left(\frac{1}{\nu''} - \frac{1}{2}L\right) \| x_k - \boldsymbol{p}(v_k) \|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \lambda \bar{\beta}\left(\frac{1}{\nu''} - \frac{1}{2}L\right) \| x_k - \boldsymbol{p}(v_k) \|^2.$$

L'estimation (10.26) conduit à l'inégalité

$$\varphi(x_m) - \varphi(x^*) < \frac{1}{C\lambda m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi, dans cette estimation, le facteur affecté à $\frac{1}{m}$ devient $\frac{1}{\lambda}$ fois plus grand que le précédent.

Discussion. Cet algorithme rend inutile une minimisation unidimensionnelle et pour $\beta_k = \tilde{\beta} \in [\bar{\beta}, 1]$ il devient à pas constant. Dans ce sens la méthode est riche de promesses. Pourtant, dans le cas général, on ne connaît pas la constante de Lipschitz L et l'évaluer plus ou moins bien dans des circonstances réelles est une tâche si compliquée, qu'on choisit la quantité ν'' nettement inférieure à la grandeur supposée $\frac{2}{L}$; il s'ensuit que dans l'estimation de C, le facteur $\frac{1}{\nu''} - \frac{1}{2}L$ s'accroît en altérant sensiblement l'estimation *a priori* de la rapidité de convergence.

Algorithme 3. Ici $\beta_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$; la variation concerne le choix de ν_k sur le segment $0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < \frac{2}{L}$:

$$x_{k+1} = \boldsymbol{p}(v_k) = \boldsymbol{p}(x_k - \nu_k \varphi'(x_k)),$$

où $\boldsymbol{p}$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble X. La quantité ν_k est définie par la relation

$$\varphi(x_{k+1}) = \varphi[\boldsymbol{p}(x_k - \nu_k \varphi'(x_k))] = \min_{\nu \in [\nu', \nu'']} \varphi[\boldsymbol{p}(x_k - \nu \varphi'(x_k))].$$

Convergence. L'approche proposée des estimations de la rapidité de convergence montre que cet algorithme est un cas particulier de l'algorithme 2 pour $\beta_k = 1$ et $\nu_k \in [\nu', \nu'']$. Ainsi, l'estimation de la rapidité de convergence est ici la même que dans l'algorithme précédent.

Stabilité. Si au lieu de $\boldsymbol{p}(x_k - \nu_k \varphi'(x_k))$ on calcule l'élément $\tilde{x}_{k+1}$ qui vérifie les inégalités

$$\varphi(\tilde{x}_{k+1}) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \varphi(x_{k+1}), \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$

alors, de même qu'auparavant, on obtient en recourant au fait que $x_{k+1} =$

$= \boldsymbol{p}(v_k)$ et $\beta_k = 1$, l'estimation

$$\varphi(x_k)-\varphi(\tilde{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})] \geqslant \lambda\left(\frac{1}{\nu''}-\frac{1}{2}L\right)\|x_k-\boldsymbol{p}(v_k)\|^2,$$

et, par suite,

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \frac{1}{C\lambda m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Discussion. Il est douteux que cet algorithme puisse convenir dans le sens des estimations *a priori* de la rapidité de convergence examinées : il ne possède pas les avantages de l'algorithme précédent, imposant pour déterminer v_k la minimisation unidimensionnelle, son estimation de la rapidité de convergence étant bien pire que celle de l'algorithme 1. Il faut attirer l'attention sur cette réserve : « dans le sens des estimations examinées de la rapidité de convergence ». Ceci signifie que sous les hypothèses connues sur le problème initial, sa convergence ne sera pas plus lente que celle assurée par nos estimations. Un point, c'est tout. Mais il se peut très bien que pour un problème concret de la classe considérée la rapidité de convergence puisse être bien plus grande. Remarquons que tous ces raisonnements supposent une situation idéalisée, en premier lieu par rapport à la précision des calculs, par exemple, l'existence d'un nombre $\lambda > 0$ caractéristique de cette précision.

Algorithme 4.

$$x_{k+1} = x_k-\beta_k(x_k-\boldsymbol{p}(v_k)), \quad \beta_k = \min\left\{1, \frac{\varrho_k}{v_k}\right\}, \tag{10.23}$$

où

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant \varrho_k \leqslant \frac{2-\varepsilon_2}{L} \quad \text{et} \quad 0 < \nu' \leqslant v_k \leqslant \nu'' < \infty.$$

Convergence. Après des calculs élémentaires on tire de (10.31) que

$$\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_2}{\nu''}\min\left\{1, \frac{\varepsilon_2}{\nu''}\right\}\|x_k-\boldsymbol{p}(v_k)\|^2.$$

L'inégalité (10.26) conduit immédiatement à l'estimation

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*) < \frac{1}{Cm} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où

$$C \leqslant \left(2\gamma+\frac{\eta}{\nu'}\right)^{-2}\frac{\varepsilon_2}{2\nu''}\min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\nu''}\right\}.$$

Stabilité. Si au lieu de $\boldsymbol{p}(v_k)$ on a calculé le point $\tilde{x}_{k+1}$ tel que $\varphi(\tilde{x}_{k+1}) \leqslant (1-\lambda_k)\varphi(x_k)+\lambda_k\varphi(x_{k+1})$, alors, d'une façon analogue à l'analyse de la stabilité de l'algorithme précédent, on obtient que dans ce cas le facteur affecté à $\frac{1}{m}$ dans l'estimation de la rapidité de convergence devient $\frac{1}{\lambda}$ fois plus grand.

Algorithme 5.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - p(v_k)), \tag{10.23}$$

$$\beta_k = \min\left\{1, \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle}{\| x_k - p(v_k)\|^2}\right\}, \tag{10.34}$$

$$0 < \varepsilon_1 \leqslant \varrho_k \leqslant \frac{2-\varepsilon_2}{L}, \quad 0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < \infty.$$

Convergence. On déduit du premier membre de (10.31) pour

$$\beta_k = \varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle}{\| x_k - p(v_k)\|^2} \leqslant 1$$

la relation

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \varrho_k \left(1 - \frac{1}{2} L\varrho_k\right) \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle^2}{\| x_k - p(v_k)\|^2}. \tag{10.35}$$

Et comme d'après (10.25)

$$\nu_k \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle \geqslant \| x_k - p(v_k)\|^2,$$

en tenant compte de la définition de ϱ_k, on aboutit à l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\nu_k} \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle \geqslant \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\nu''} \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle.$$

Mais si $\beta_k = 1$, on a

$$\varrho_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle}{\| x_k - p(v_k)\|^2} \geqslant 1$$

et, par conséquent, on obtient de (10.31)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2} L\varrho_k\right) \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle.$$

En adoptant

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\nu''}\right\},$$

on aboutit à l'estimation

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \varepsilon \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k)\rangle \geqslant \frac{\varepsilon}{\nu''} \| x_k - p(v_k)\|^2. \tag{10.36}$$

Ceci conduit avec (10.26) à la même estimation que l'algorithme 4.

Stabilité. Dans ce cas sont valables les mêmes considérations que dans les deux algorithmes précédents.

Algorithme 6.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - p(v_k)); \tag{10.23}$$

on choisit comme β_k le plus grand des nombres vérifiant les inégalités

$$\varphi(x_k)-\varphi[x_k-\beta_k(x_k-p(v_k))]\geqslant \varepsilon\beta_k\langle\varphi'(x_k), x_k-p(v_k)\rangle,$$
$$0<\beta_k\leqslant 1. \qquad (10.37)$$

Ici ε peut être un nombre quelconque de l'intervalle (0, 1) : $0<\varepsilon<1$, $0<\nu\leqslant\nu_k\leqslant\nu''<\infty$.

Convergence. Montrons d'abord qu'il existe $\bar{\beta}_k$ qui vérifie les conditions (10.37). En effet, en choisissant $\bar{\beta}_k$ d'après la formule (10.34), on obtient de (10.35) et (10.36)

$$\varphi(x_k)-\varphi[x_k-\bar{\beta}_k(x_k-p(v_k))]\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_2\bar{\beta}_k\langle\varphi'(x_k), x_k-p(v_k)\rangle.$$

Mais $0<\varepsilon_2<2$ et c'est pourquoi les conditions (10.37) sont remplies.

Puisqu'on adopte comme β_k le plus grand des nombres qui satisfont à (10.37), on a compte tenu de (10.25)

$$\beta_k\geqslant \min\left\{1, \varrho_k\frac{\langle\varphi'(x_k), x_k-p(v_k)\rangle}{\|x_k-p(v_k)\|^2}\right\}\geqslant \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\nu''}\right\},$$

et donc, on aboutit à la même estimation que dans les algorithmes 4 et 5.

Stabilité. Si au lieu de $p(v_k)$ on calcule y_k tel qu'on observe l'inégalité

$$\varphi(x_k)-\varphi[x_k-\beta_k(x_k-y_k)]\geqslant \varepsilon\beta_k\langle\varphi'(x_k), x_k-p(v_k)\rangle$$

pour un certain $\varepsilon\in(0, 1]$, alors, vu que

$$\nu_k\langle\varphi'(x_k), x_k-p(v_k)\rangle\geqslant \|x_k-p(v_k)\|^2,$$

on obtient

$$\varphi(x_k)-\varphi[x_k-\beta_k(x_k-y_k)]\geqslant \frac{\varepsilon}{\nu_k}\beta_k\|x_k-p(v_k)\|^2\geqslant \frac{\varepsilon}{\nu''}\beta_k\|x_k-p(v_k)\|^2.$$

De là et de (10.26) on obtient l'estimation

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*)<\left[C\frac{\varepsilon}{\nu''}\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k\right]^{-1} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

pour $C\leqslant\left(2\gamma+\frac{\eta}{\nu'}\right)^{-2}$. Si, de plus, $0<\tilde{\beta}\leqslant\beta_k\leqslant 1$, il vient

$$\varphi(x_m)-\varphi(x^*)<\frac{1}{\tilde{\beta}}\frac{\nu''}{C\varepsilon m} \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Discussion. Les considérations sur les avantages éventuels de la recherche de β_k suivant cet algorithme par rapport à l'algorithme 1 restent les mêmes que celles de la discussion de l'algorithme 2 de la méthode du gradient (cf. paragraphe 9.5).

Algorithme 7.

$$x_{k+1}=x_k-\beta_k(x_k-p(v_k)); \qquad (10.23)$$

on choisit comme β_k le plus grand des nombres vérifiant les inégalités

$$\varphi(x_k)-\varphi[x_k-\beta_k(x_k-p(v_k))]\geqslant \varepsilon\beta_k\|x_k-p(v_k)\|^2, \quad 0\leqslant\beta_k\leqslant 1. \qquad (10.38)$$

Ici ε est un nombre quelconque de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{\nu''}\right)$:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\nu''}, \quad 0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < \infty.$$

Convergence et stabilité. L'analyse de la convergence de l'algorithme précédent rend clair que β_k défini par la formule (10.34) satisfait aux conditions (10.38). Ainsi, le système (10.38) possède une solution. La démonstration de la convergence et de la stabilité est ici immédiate d'après les raisonnements de l'algorithme précédent.

A propos du contrôle. Pour contrôler la convergence de la relaxation pendant l'application de la méthode du gradient projeté, il est avantageux de calculer à chaque itération la grandeur

$$\frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| x_k - p(v_k) \|^2}.$$

L'estimation (10.26) montre que tant qu'on conserve la situation

$$\frac{\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})}{\| x_k - p(v_k) \|^2} \geqslant \varepsilon,$$

où ε est définie par la précision adoptée des calculs, le processus converge avec une rapidité de l'ordre non inférieur à $O\left(\frac{1}{m}\right)$.

10.3. Méthode des directions admissibles

L'idée de la méthode est très claire : parmi toutes les directions admissibles en x_k on choisit celle dans laquelle la décroissance de la fonction est la plus rapide, puis on réalise la descente dans cette direction. Ainsi, cette méthode peut être envisagée comme une extension naturelle de la méthode du gradient aux problèmes de minimisation avec contraintes.

Rappelons que la direction $-s \neq 0$ au point $x \in X$ est dite *admissible* s'il existe un nombre $\bar{\beta} > 0$ tel que $x - \beta s \in X$ pour tout $\beta \in [0, \bar{\beta}]$.

Nous avons déjà dit que la recherche de la direction de la descente dans les méthodes de linéarisation et du gradient projeté dans le cas où l'ensemble admissible est soumis à des contraintes non linéaires constitue au fond un problème aussi difficile que le problème initial. La méthode des directions admissibles présente devant les méthodes précédentes cet avantage que même dans le cas des contraintes non linéaires, pour définir la direction de la descente, il suffit de résoudre un problème de programmation linéaire ou un problème bien simple de programmation quadratique.

Ainsi, on considère le problème

$$\min_{x \in X} \varphi(x),$$

où

$$X = \{x: f_i(x) \geqslant b_i \quad (i = \overline{1, m})\},$$

les fonctions $f_i(x)$ sont concaves et appartiennent à la classe $C^{1,1}(X)$. Dans le cas général, les contraintes qui définissent l'ensemble X forment deux groupes : contraintes linéaires et non linéaires.

Pour que les calculs examinés dans notre discussion ne soient pas trop lourds, nous n'allons pas faire cette distinction. Mais nous verrons alors apparaître certaines contraintes superflues imposées à l'ensemble X et pouvant être supprimées sans peine.

Conditions d'existence des directions admissibles. Soit $\varepsilon \geqslant 0$ un nombre arbitraire en général suffisamment petit, dont le choix sera discuté dans la description de l'algorithme de la méthode. Déterminons pour $x \in X$ la collection des indices

$$I(x, \varepsilon) = \{i: \ 0 \leqslant f_i(x) - b_i \leqslant \varepsilon\}.$$

Remarquons que pour $\varepsilon = 0$, on a

$$I(x, 0) = \{i: \ f_i(x) = b_i\}.$$

Considérons en $x \in X$ les ensembles

$$S(x, \varepsilon) = \{s: \ \langle f_i'(x), \quad s\rangle \leqslant 0, \quad i \in I(x, \varepsilon)\}$$

et

$$S'(x, \varepsilon) = \{s, \sigma: \ \langle f_i'(x), \quad s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(x, \varepsilon), \quad \sigma > 0\}.$$

Etablissons les conditions d'existence d'une direction admissible en $x \in X$. Dans le cas où x est un point intérieur de X, c'est-à-dire lorsque $I(x, 0) = \varnothing$, toute direction $-s$ en x est admissible. Supposons que $I(x, 0) \neq \varnothing$.

Théorème 10.4. *Pour que la direction $-s$ soit admissible en $x \in X$ il faut que $s \in S(x, 0)$ et il suffit que s, $\sigma \in S'(x, \varepsilon)$ au moins pour un $\varepsilon \geqslant 0$.*

La condition est nécessaire. Soit la direction $-s$ admissible en x. Prouvons que $s \in S(x, 0)$. S'il n'en est pas ainsi, il existe un indice $i \in I(x, 0)$ tel que $\langle f_i'(x), s\rangle > 0$. La concavité de la fonction $f_i(x)$ entraîne que pour tout $\beta > 0$ on a l'inégalité

$$b_i - f_i(x - \beta s) = f_i(x) - f_i(x - \beta s) \geqslant \beta \langle f_i'(x), s\rangle > 0,$$

c'est-à-dire que $x - \beta s \notin X$, ce qui contredit l'hypothèse sur la direction admissible $-s$.

La condition est suffisante. Soit $s, \sigma \in S'(x, \varepsilon)$. Montrons que la direction $-s$ est admissible. Si $i \notin I(x, \varepsilon)$, c'est-à-dire si $f_i(x) - b_i > \varepsilon \geqslant 0$, alors, un faible déplacement du point x suivant une direction quelconque et, notamment, dans celle de $-s$ ne compromet pas l'inégalité $f_i(x) - b_i > 0$. Soit $i \in I(x, \varepsilon)$. Supposons que quel que soit $\beta > 0$ aussi petit que l'on veut, on ait $f_i(x - \beta s) < b_i$, c'est-à-dire que la direction $-s$ soit inadmissible. Alors, puisque $f_i(x) \geqslant b_i$, quel que soit $\beta > 0$, on a

$$\frac{1}{\beta}[f_i(x) - f_i(x - \beta s)] > \frac{1}{\beta}(b_i - b_i) = 0$$

et, donc,

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[f_i(x)-f_i(x-\beta s)] = \langle f_i'(x), s\rangle \geqslant 0,$$

ce qui contredit la condition s, $\sigma \in S'(x, \varepsilon)$, puisque $\sigma > 0$ et $i \in I(x, \varepsilon)$.

Le théorème est démontré.

Comme dans la méthode examinée la direction de la descente est choisie dans l'ensemble $S'(x, \varepsilon)$, les conditions qui imposent à cet ensemble d'être non vide deviennent très importantes. Le nombre de contraintes du problème initial étant fini (égal à m), pour tout point $x \in X$ il existe un nombre $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x)$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ on ait $I(x, \varepsilon) = I(x, 0)$. Il s'ensuit qu'il suffit d'examiner le critère imposant à l'ensemble $S'(x, 0)$ d'être non vide.

Théorème 10.5. *Pour que $S'(x, 0) \neq \varnothing$ quel que soit le point frontière $x \in X$, il faut et il suffit que l'ensemble X soit régulier*). De plus, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $S'(x, 0) \neq \varnothing$ pour tout $\sigma \in (0, \sigma_0]$.*

La condition est *nécessaire*. Supposons que les conditions de régularité soient violées : pour tout $y \in X$ il existe un indice i tel que $f_i(y) = b_i$. Alors, quel que soit $x \in X$, on a $i \in I(x, 0)$ et $f_i(x-\beta(x-y)) = b_i$ pour tout $\beta \in (0, 1]$ puisque $x-\beta(x-y) \in X$. Il en résulte

$$0 = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[f_i(x)-f_i(x-\beta(x-y))] = \langle f_i'(x), x-y\rangle.$$

Comme $-s = y-x$ est une direction admissible en x, alors que y est un point quelconque de X, nous avons abouti au fait que $\langle f_i'(x), s\rangle = 0$ quelle que soit la direction admissible en x et, par conséquent, $S'(x, 0) = \varnothing$, puisque $\langle f_i'(x), s\rangle + \sigma > 0$, pour $\sigma > 0$ et $i \in I(x, 0)$.

La condition est suffisante. Soit x un point frontière de l'ensemble X, c'est-à-dire $f_i(x) = b_i$ pour un certain $i \in I(x, 0)$. De l'hypothèse de régularité de X on déduit l'existence de $y \in X$ tel que $f_i(y) > b_i$ pour tout $i = \overline{1, m}$. Puisque les fonctions $f_i(x)$ sont concaves, il vient

$$\langle f_i'(x), x-y\rangle \leqslant f_i(x)-f_i(y) = b_i-f_i(y)$$

pour $i \in I(x, 0)$. Notons

$$\sigma^0(y) = \min_{i \in I(x, 0)} \{f_i(y)-b_i\} > 0.$$

Alors,

$$b_i-f_i(y) \leqslant -\sigma^0(y)$$

pour tout $i \in I(x, 0)$. Et comme la direction $-s = y-x$ est admissible en x, pour tout $i \in I(x, 0)$ on a

$$\langle f_i'(x), s\rangle \leqslant -\sigma^0(y).$$

Soit σ une grandeur quelconque telle que $0 < \sigma \leqslant \sigma^0(y)$. Il vient

$$\langle f_i'(x), s\rangle + \sigma \leqslant \langle f_i'(x), s\rangle + \sigma^0(y) \leqslant 0, \quad i \in I(x, 0)$$

*) La définition de la régularité d'un ensemble X est donnée au paragraphe 3.3.

et, donc, $S'(x, 0) \neq \varnothing$ pour tout $\sigma \in (0, \sigma^0]$, où

$$\sigma^0 = \sup_{y \in X} \min_{i \in I(x, 0)} \{f_i(y) - b_i\}.$$

Choix de la direction de la descente. Supposons qu'après la k-ième itération on ait calculé $x_k \in X$ et $\varepsilon_k > 0$.

Examinons le problème

$$\max \sigma$$

sous les conditions

$$\begin{aligned} &\langle f_i'(x_k), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(x_k, \varepsilon_k), \\ &-\langle \varphi'(x_k), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad N(s) \leqslant 1, \end{aligned} \tag{10.39}$$

où, soit

$$N(s) = N_1(s) = \langle s, s\rangle = |\,|s|\,|^2, \tag{10.40}$$

soit

$$N(s) = N_2(s) \max_{j = \overline{1, n}} |s_j|. \tag{10.41}$$

Désignons par $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}(x_k)$ et $\tilde{s}_k = \tilde{s}(x_k)$ la solution de (10.39) et explicitons le problème. La première condition garantit que la direction $-\tilde{s}_k$ est admissible. La deuxième astreint la grandeur $\langle \varphi'(x_k), s\rangle$ à être maximale, c'est-à-dire parmi toutes les directions admissibles $-s$ telles que $s, \sigma \in S'(x_k, \varepsilon_k)$, la direction $-\tilde{s}_k$ (pour $\tilde{\sigma}_k > 0$) assure la décroissance la plus rapide de la fonction $\varphi(x)$. Enfin, la troisième condition supprime la contrainte qui impose à la solution du problème (10.39) d'être non bornée. Comme nous l'avons déjà dit l'avantage que présente le problème (10.39) est qu'il est relativement simple par rapport aux problèmes où le choix de la direction se faisait suivant les méthodes décrites dans ce qui précède.

L'étude de la convergence de la méthode des directions admissibles a à sa base le théorème important suivant.

Théorème 10.6. *Pour que le point x de l'ensemble régulier X soit optimal, il faut et il suffit que quels que soient s et σ vérifiant les conditions*

$$\langle f_i'(x), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(x, 0), \tag{10.42}$$

$$-\langle \varphi'(x), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \tag{10.43}$$

on ait $\sigma \leqslant 0$.

La condition est *nécessaire*. Soit x le point du minimum. S'il existe un couple s, σ qui satisfait aux conditions (10.42), (10.43) tel que $\sigma > 0$, alors $s \in S'(x, 0)$ et donc la direction $-s$ est admissible (théorème 10.4) ; de plus $\langle \varphi'(x), s\rangle \geqslant \sigma > 0$. Mais d'après le théorème 2.14, si x est un point du minimum, $\langle \varphi'(x), s\rangle \leqslant 0$ quelles que soient les directions admissibles. Nous tombons ainsi sur une contradiction.

La condition est *suffisante*. Supposons que quels que soient s et σ vérifiant les conditions du théorème, on ait $\sigma \leqslant 0$. Voici la notation formalisée de

cette condition :

$$0 \cdot s + 1 \cdot \sigma \leqslant 0. \tag{10.44}$$

Appliquons au système (10.42)-(10.44) le théorème 2.7 (celui de Farkas) : il existe $u_i \geqslant 0$, $i \in I(x, 0)$ et $u_0 > 0$ tels que

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I(x, 0)} u_i f_i'(x) - u_0 \varphi'(x), \tag{10.45}$$

$$1 = \sum_{i \in I(x, 0)} u_i + u_0. \tag{10.46}$$

Montrons que l'hypothèse $u_0 = 0$ conduit à une contradiction. En effet, dans ce cas il s'ensuit de (10.46) qu'au moins un $u_l > 0$ pour $l \in I(x, 0)$. La régularité de X entraîne que pour tout $l \in I(x, 0)$ il existe $z \in X$ tel que $f_l(z) > b_l$. Alors, la direction $-s = z - x$ est admissible. La concavité de la fonction $f_l(x)$ amène

$$-\langle f_l'(x), s\rangle \geqslant f_l(z) - f_l(x) = f_l(z) - b_l > 0.$$

Multiplions maintenant scalairement l'égalité (10.45) par $-s$:

$$0 = -\sum_{i \in I(x, 0)} u_i \langle f_i'(x), s\rangle.$$

Comme $-s$ est une direction admissible, d'après le théorème 10.4 $s \in S(x, 0)$ et, par conséquent, tous les termes du second membre sont de même signe, alors que l'un d'eux, plus précisément, le terme l, est manifestement non nul : $-\langle f_l'(x), s\rangle > 0$, ce qui contredit l'annulation de toute la somme. La seule possibilité qui reste est $u_0 > 0$. Dans ce cas, la condition (10.45) peut s'écrire

$$\varphi'(x) = -\sum_{i \in I(x, 0)} \frac{u_i}{u_0} f_i'(x),$$

et donc, d'après la remarque du théorème 3.4, x est un point optimal.

Algorithmes de la méthode. Choisir comme approximation initiale x_0 un élément quelconque de l'ensemble X et comme ε_0 un nombre de l'intervalle semi-ouvert (0, 1]. Supposons qu'à la suite de la k-ième itération on ait calculé x_k et ε_k. Décrivons la $(k+1)$-ième itération.

Algorithme 1.

A. En résolvant le problème (10.39), calculer σ_k et s_k admissibles telles que $\sigma_k \geqslant \xi_k \tilde{\sigma}_k$, où $0 < \xi \leqslant \xi_k \leqslant 1$.

B. Si $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k$, en résolvant le problème de minimisation unidimensionnelle, calculer β_k. β_k doit alors satisfaire aux conditions

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$

$$\omega_k = \min_{\beta \in B_k} \varphi(x_k - \beta s_k), \quad B_k = \{\beta \geqslant 0 \colon x_k - \beta s_k \in X\}. \tag{10.47}$$

Ensuite, calculer $x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k$ et poser $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

C. Si $\sigma_k < \varepsilon_k$, poser $\varepsilon_{k+1} = \delta_k \varepsilon_k$, où les nombres δ_k doivent satisfaire à la condition $0 < \delta_k \leqslant \delta < 1$. Et, enfin, poser $x_{k+1} = x_k$.

Dans le cas général, la convergence de la méthode des directions admissibles est étudiée sous les conditions $\delta = 1/2$, $\lambda_k = 1$, $\xi_k = 1$. Pourtant, lorsqu'on résout le problème (10.39), des erreurs de calcul apparaissent naturellement, et par suite, au lieu de $\tilde{\sigma}_k$ on obtient σ_k et le vecteur s_k correspondant. Les inégalités du point B auxquelles doit satisfaire la grandeur β_k, admettent, comme il en a été dans les méthodes examinées précédemment, des erreurs dans le calcul du minimum unidimensionnel de la fonction $\varphi(x_k - \beta s_k)$. Enfin, la liberté du choix des δ_k permet d'appliquer des éléments de contrôle dans la minimisation. En effet, si la minimisation donne lieu à la situation du point C, c'est-à-dire si $\sigma_k < \varepsilon_k$, alors $x_{k+1} = x_k$. Il est bien possible qu'une lente décroissance des grandeurs ε_k conduise à ce que pour un certain nombre p on ait

$$I(x_{k+i}, \varepsilon_{k+i}) = I(x_k, \varepsilon_k) \quad (i = \overline{1, p}),$$

et, par suite,

$$\sigma_{k+i} < \varepsilon_{k+i} \quad \text{et} \quad x_{k+i} = x_k \quad (i = \overline{1, p}).$$

D'autre part, on sait qu'une décroissance rapide de ε_k, surtout si le point x_k se trouve en dehors d'un voisinage suffisamment petit du point du minimum, peut produire un effet zig-zag près de la frontière de l'ensemble X, qui encore ralentit sensiblement la convergence du processus. Ainsi, l'information sur la convergence du processus, en s'accumulant, peut naturellement rendre nécessaire le changement des grandeurs δ_k.

Algorithme 2.

A. En résolvant le problème (10.39) calculer σ_k et s_k admissibles et telles que $\sigma_k \geqslant \xi_k \tilde{\sigma}_k$, où $0 < \xi \leqslant \xi_k \leqslant 1$.

B. Si $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k$, alors, choisir comme β_k le plus grand des nombres vérifiant les conditions

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k s_k) \geqslant \varrho \beta_k \sigma_k, \quad \beta_k \in B_k \tag{10.48}$$

pour un certain $\varrho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Ensuite, calculer $x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k$ et poser $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

C. Si $\sigma_k < \varepsilon_k$, poser $\varepsilon_{k+1} = \delta_k \varepsilon_k$, où $0 < \delta_k \leqslant \delta < 1$. Et, enfin, poser $x_{k+1} = x_k$.

Algorithme 3.

A. En résolvant le problème (10.39), calculer σ_k et s_k admissibles telles que $\sigma_k \geqslant \xi_k \tilde{\sigma}_k$, où $0 < \xi \leqslant \xi_k \leqslant 1$.

B. Si $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k$, choisir

$$\beta_k = \begin{cases} \min\left\{\zeta_k, \dfrac{1}{L}\ \sigma_k\right\} & \text{dans le cas} \quad N(s_k) = N_1(s_k), \\ \min\left\{\zeta_k, \dfrac{1}{nL}\ \sigma_k\right\} & \text{dans le cas} \quad N(s_k) = N_2(s_k), \end{cases} \tag{10.49}$$

où $\zeta_k = \sup\limits_{\beta \in B_k} \beta$, alors que L est la constante de Lipschitz dans la condition $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$. Ensuite, calculer $x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k$ et poser $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.

C. Si $\sigma_k < \varepsilon_k$, poser $\varepsilon_{k+1} = \delta_k \varepsilon_k$, où $0 < \delta_k \leqslant \delta < 1$. Et, enfin, poser $x_{k+1} = x_k$.

Convergence de la méthode des directions admissibles. Soit $-s$ la direction admissible en $x \in X$. Considérons l'ensemble

$$B = \{\beta \geqslant 0 : \ x - \beta s \in X\}$$

et déterminons la grandeur $\zeta = \sup_{\beta \in B} \beta$. De la sorte, ζ caractérise la plus grande distance du point x à la frontière de l'ensemble X dans la direction $-s$. Supposons que toutes les $f_i(x)$ appartiennent à la classe $C^{1,1}(X)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L_1 > 0$ telle que pour tout $i = \overline{1, m}$ et quels que soient $x, y \in X$, on ait l'inégalité

$$\| f_i'(x) - f_i'(y) \| \leqslant L_1 \| x - y \|.$$

Désignons

$$\gamma_1 = \max_{x \in X_0} \max_{i = \overline{1, m}} \| f_i'(x) \|,$$

où l'ensemble

$$X_0 = \{x \in X: \ \varphi(x) \leqslant \varphi(x^0)\}$$

est supposé borné.

Lemme 10.1. *Pour tout s tel que $s, \sigma \in S'(x, \varepsilon)$ pour $x \in X_0$, $\varepsilon > 0$ et $N(s) \leqslant 1$, on a l'inégalité*

$$\zeta \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\gamma_1}, \frac{\sigma}{L_1} \right\}. \tag{10.50}$$

Démonstration. Il est évident qu'il suffit de considérer le cas $\zeta < +\infty$. Notons $y = x - \zeta s$. Puisque dans notre cas $\zeta = \max_{\beta \in B} \beta$, le point y est un point frontière, et donc il existe un indice i tel que $f_i(y) = b_i$. Si en x on a $f_i(x) - b_i > \varepsilon$, alors

$$\varepsilon < f_i(x) - b_i = | f_i(x) - f_i(y) | \leqslant \gamma_1 \| x - y \| = \gamma_1 \zeta \| s \|,$$

d'où

$$\zeta > \frac{1}{\| s \|} \frac{\varepsilon}{\gamma_1}. \tag{10.51}$$

Si en x on a $0 \leqslant f_i(x) - b_i \leqslant \varepsilon$, alors $i \in I(x, \varepsilon)$, et puisque $s, \sigma \in S'(x, \varepsilon)$, on a $\langle f_i'(x), s \rangle \leqslant -\sigma$. En utilisant la propriété de concavité, on obtient

$$\langle f_i'(y), y - x \rangle \leqslant f_i(y) - f_i(x) = b_i - f_i(x) \leqslant 0$$

ou $-\zeta \langle f_i'(y), s \rangle \leqslant 0$. Comme $s, \sigma \in S'(x, \varepsilon)$, $-s$ est une direction admissible et, par conséquent, $\zeta > 0$. C'est pourquoi $\langle f_i'(y), s \rangle \geqslant 0$. Enfin,

$$\sigma \leqslant -\langle f_i'(x), s \rangle \leqslant \langle f_i'(y), s \rangle - \langle f_i'(x), s \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \| f_i'(y) - f_i'(x) \| \, \| s \| \leqslant L_1 \| y - x \| \, \| s \| = L_1 \zeta \| s \|^2,$$

d'où

$$\zeta \geqslant \frac{1}{\|s\|^2} \frac{\sigma}{L_1}. \tag{10.52}$$

Soit $N(s) = N_1(s) = \|s\|^2 \leqslant 1$. Alors on tire de (10.51) et (10.52)

$$\zeta \geqslant \min\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma_1}, \frac{\sigma}{L_1}\right\} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \min\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma_1}, \frac{\sigma}{L_1}\right\}.$$

Soit, maintenant, $N(s) = N_2(s) = \max\limits_{j=\overline{1,n}} |s_j| \leqslant 1$. Comme $N_1(s) \leqslant n(N_2(s))^2$, on obtient de (10.51)

$$\zeta \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma}{\gamma_1},$$

et de (10.52): $\zeta \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma}{L_1}$. Finalement,

$$\zeta \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \min\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma_1}, \frac{\sigma}{L_1}\right\}.$$

Ainsi, l'estimation (10.50) est démontrée pour $N(s) = N_1(s)$ et pour $N(s) = N_2(s)$.

La convergence de la méthode des directions admissibles est justifiée sous les hypothèses suivantes :

1) $\varphi(x)$ est une fonction convexe de la classe $C^{1,1}(X)$;

2) $f_i(x)$ $(i = \overline{1, m})$ sont des fonctions concaves de la classe $C^{1,1}(X)$;

3) X est un ensemble régulier ;

4) diam $X_0 = \eta < \infty$;

5) $\{x_k\}$ est une suite qui se construit suivant l'un des trois algorithmes considérés.

Le théorème de la convergence se démontre en cinq points. Le point I consiste à évaluer inférieurement la différence $\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})$. Le point II prouve la convergence de la suite $\{\varphi(x_k)\}$. Les points III-V montrent l'existence d'une sous-suite $\{x_{k_i}\}$ qui converge vers $\bar{x} \in X$, telle que $\tilde{\sigma}_{k_i} = \tilde{\sigma}(x_{k_i})$ tend vers $\tilde{\sigma}(\bar{x})$ pour $i \to \infty$, où $\tilde{\sigma}(\bar{x})$ vérifie les conditions du théorème 10.6, ce qui prouve l'optimalité du point $\bar{x}$: $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x^*)$.

Théorème 10.7. *Si les conditions* 1)-5) *sont remplies, il vient*

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Si, de plus, le point x^* *est unique, on a*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*.$$

Démonstration. I. Montrons que pour $\sigma_k \geqslant 0$ l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda \varrho \sigma_k \min\left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\} \tag{10.53}$$

est vraie pour λ et ϱ tels que $0 < \varrho \leqslant 1/2$ et $0 < \lambda \leqslant 1$. En effet, dans le cas de l'algorithme 1 on déduit du lemme 9.3, de la condition (10.47) et de

la condition $\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle \geqslant \sigma_k$ (ce dernier fait a lieu puisque s_k et σ_k sont admissibles pour le problème (10.39)), pour tout $\beta \in [0, \zeta_k]$, l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k [\varphi(x_k) - \omega_k] \geqslant \lambda_k [\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta s_k)] \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k \left[\beta \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle - \frac{1}{2} L\beta^2 \| s_k \|^2\right] \geqslant \lambda_k \left[\beta\sigma_k - \frac{1}{2} L\beta^2 \| s_k \|^2\right]. \quad (10.54)$$

Si

$$N(s_k) = N_1(s_k) = \| s_k \|^2 \leqslant 1,$$

pour tout $\beta \in [0, \zeta_k]$, on a

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \left(\beta\sigma_k - \frac{1}{2} L\beta^2\right),$$

et, pour $\bar{\beta}_k = \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{L}\right\}$, on déduit l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} \lambda_k \sigma_k \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{L}\right\} \geqslant \varrho\lambda\sigma_k \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\}.$$

Mais si

$$N(s_k) = N_2(s_k) = \max_{j = \overline{1, n}} |s_{jk}| \leqslant 1,$$

puisque $N_1(s_k) \leqslant n(N_2(s_k))^2$, (10.54) implique

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \left(\beta\sigma_k - \frac{1}{2} L\beta^2 n\right).$$

D'où, pour

$$\bar{\beta}_k = \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\},$$

on obtient l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} \lambda_k \sigma_k \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\} \geqslant \varrho\lambda\sigma_k \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\}.$$

Ainsi, pour l'algorithme 1 l'inégalité (10.53) est observée.

Considérons le cas de l'algorithme 2. Le lemme 9.3 entraîne

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta s_k) \geqslant \beta \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle - \frac{1}{2} L\beta^2 \| s_k \|^2 \geqslant \beta\sigma_k - \frac{1}{2} L\beta^2 \| s_k \|^2.$$

On en tire avec $N(s_k) = N_1(s_k) \leqslant 1$ pour $\bar{\beta}_k = \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{L}\right\}$:

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \bar{\beta}_k s_k) \geqslant \frac{1}{2} \bar{\beta}_k \sigma_k \geqslant \varrho\bar{\beta}_k \sigma_k$$

avec $\varrho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Cette inégalité est vérifiée avec $N(s_k) = N_2(s_k) \leqslant 1$ pour $\bar{\beta}_k = \min \left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\}$. Puisque dans l'algorithme 2 on choisit comme β_k le plus

grand des nombres vérifiant la relation (10.48), il vient

$$\beta_k \geqslant \begin{cases} \min\left\{\zeta_k, \dfrac{\sigma_k}{L}\right\} \geqslant \min\left\{\zeta_k, \dfrac{\sigma_k}{nL}\right\} \text{ pour } N(s_k) = N_1(s_k), \\ \min\left\{\zeta_k, \dfrac{\sigma_k}{nL}\right\} \text{ pour } N(s_k) = N_2(s_k). \end{cases}$$

Cette expression montre avec (10.48) que

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \varrho\sigma_k \min\left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\}.$$

Dans le cas de l'algorithme 3, puisque β_k, calculé d'après la formule (10.49), est tel que $\beta_k = \bar{\beta}_k$, où $\bar{\beta}_k$ est défini de même que dans les algorithmes précédents, il vient que l'estimation (10.53) est vraie pour $\lambda = 1$ et $\varrho = 1/2$, et, donc, pour $0 < \lambda \leqslant 1$ et $0 < \varrho \leqslant 1/2$.

II. Puisque pour $\sigma_k < \varepsilon_k$, on a

$$\varphi(x_k) = \varphi(x_{k+1}),$$

il s'ensuit avec (10.53) que la suite $\{\varphi(x_k)\}$ décroît monotonement (plus précisément, elle n'est pas croissante) ; de plus, elle est bornée inférieurement par la grandeur

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x).$$

Il en résulte que la suite $\{\varphi(x_k)\}$ est convergente.

III. Prouvons l'existence d'une sous-suite $\{\sigma_{k_p}\}$ telle que $\sigma_{k_p} \to 0$ et $\varepsilon_{k_p} \to 0$ pour $p \to \infty$.

Notons que dans le problème (10.39) le couple $\sigma = 0$, $s = \mathbf{0}$ est admissible et donc $\sigma_k = \max \sigma \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Supposons qu'il existe $\sigma > 0$ tel que tout $\sigma_k \geqslant \sigma > 0$. Montrons qu'il existe alors un tel $\varepsilon > 0$ que $\varepsilon_k \geqslant \varepsilon > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Si $\varepsilon_k \to 0$ pour $k \to \infty$, alors il existe un indice $k_0 > 0$ tel que $0 < \varepsilon_k \leqslant \sigma \leqslant \sigma_k$ pour tout $k \geqslant k_0$. Or, d'après le point B, quel que soit l'un des trois algorithmes, dans ce cas $\varepsilon_k = \varepsilon_{k_0} > 0$ pour tout $k \geqslant k_0$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction.

On déduit de (10.50) l'inégalité

$$\zeta_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \min\left\{\frac{\varepsilon_k}{\gamma_1}, \frac{\sigma_k}{L_1}\right\} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \min\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma_1}, \frac{\sigma}{L_1}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \xi = \text{const} > 0.$$

Et comme dans nos hypothèses l'estimation (10.53) est vraie, on est conduit à l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda\varrho\sigma_k \min\left\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{nL}\right\} \geqslant \lambda\varrho\sigma \min\left\{\xi, \frac{\sigma}{nL}\right\} \geqslant \text{const} > 0,$$

qui contredit la convergence de la suite $\{\varphi(x_k)\}$.

Ainsi, il existe une sous-suite $\{\sigma_{k_p}\}$ telle que $\sigma_{k_p} \to 0$ pour $p \to \infty$. Les points B et C des trois algorithmes entraînent que $\varepsilon_{k_p} \to 0$ pour $p \to \infty$.

IV. Notons $\tilde{\sigma}'(x)$ la solution du problème

$$\begin{gathered} \max \sigma, \\ \langle f_i'(x), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I', \\ -\langle \varphi'(x), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \\ N(s) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{10.55}$$

Montrons que $\tilde{\sigma}'(x)$ dépend continûment de x.

Dans ce problème I' est une collection fixée des indices.

Pour la démonstration, constatons d'abord que si σ^* et σ' sont telles que

$$\sigma^* = \max_{N(s) \leqslant 1} \min_{i \in I} \{\langle a_i, s\rangle\}, \tag{10.56}$$

alors que

$$\begin{gathered} \sigma' = \max \sigma, \\ \langle a_i, s\rangle \geqslant \sigma, \quad i \in I, \\ N(s) \leqslant 1, \end{gathered} \tag{10.57}$$

on a $\sigma^* = \sigma'$.

En effet, supposons qu'à la grandeur σ^* correspond le vecteur s^*. Alors, pour tout $i \in I$ on a $\sigma^* \leqslant \langle a_i, s^*\rangle$, puisque

$$\max_{N(s) \leqslant 1} \min_{i \in I} \{\langle a_i, s\rangle\} = \min_{i \in I} \{\langle a_i, s^*\rangle\} = \sigma^*.$$

Donc, s^* satisfait aux contraintes du problème (10.57) et, par conséquent, $\sigma' \geqslant \sigma^*$. Supposons maintenant qu'à la grandeur σ' correspond le vecteur s'. Alors, $\langle a_i, s'\rangle \geqslant \sigma'$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire

$$\sigma' \leqslant \min_{i \in I} \langle a_i, s'\rangle.$$

Mais

$$\sigma^* \geqslant \min_{i \in I} \langle a_i, s'\rangle,$$

c'est pourquoi $\sigma' \leqslant \sigma^*$. On obtient finalement $\sigma' = \sigma^*$.

Il en résulte que $\tilde{\sigma}'(x)$, solution du problème (10.55), est telle que

$$\tilde{\sigma}'(x) = \max_{N(s) \leqslant 1} \min \left\{\langle \varphi'(x), s\rangle, \min_{i \in I'} \{-\langle f_i'(x), s\rangle\}\right\}.$$

Et comme $\varphi'(x)$ et toutes les $f_i'(x)$ sont continues, $\tilde{\sigma}'(x)$ est continue elle aussi. Pour s'en convaincre, il suffit de démontrer la proposition suivante : si les fonctions $\psi_1(x, s)$ et $\psi_2(x, s)$ sont continues, la fonction

$$\theta(x) = \max_{s \in \Omega} \psi(x, s),$$

où

$$\psi(x, s) = \min \{\psi_1(x, s), \psi_2(x, s)\}$$

et Ω est un compact, est continue elle aussi.

Pour prouver la continuité de $\theta(x)$, montrons d'abord que $\psi(x, s)$ est continue.

Soit au point $(\bar{x}, \bar{s})$,

$$\psi_1(\bar{x}, \bar{s}) \neq \psi_2(\bar{x}, \bar{s}),$$

par exemple,

$$\psi_2(\bar{x}, \bar{s}) - \psi_1(\bar{x}, \bar{s}) = \eta > 0.$$

Alors, pour tout (x, s) d'un voisinage suffisamment petit du point $(\bar{x}, \bar{s})$, on a

$$\psi_2(x, s) - \psi_1(x, s) > \frac{\eta}{2} > 0,$$

c'est-à-dire $\psi(x, s) = \psi_1(x, s)$ et, par conséquent, $\psi(x, s)$ est continue en $(\bar{x}, \bar{s})$.

Soit maintenant

$$\psi_1(\bar{x}, \bar{s}) = \psi_2(\bar{x}, \bar{s}) = \psi(\bar{x}, \bar{s}).$$

Alors

$$|\psi(x, s) - \psi(\bar{x}, \bar{s})| \leqslant |\psi_1(x, s) - \psi_1(\bar{x}, \bar{s})| + |\psi_2(x, s) - \psi_2(\bar{x}, \bar{s})| \to 0$$

pour $x(s) \to (\bar{x}, \bar{s})$, en vertu de la continuité de $\psi_1(x, s)$ et de $\psi_2(x, s)$.

Montrons la continuité de $\theta(x)$ au point $\bar{x}$. A cet effet, introduisons l'ensemble

$$Q(x) = \{q \in \Omega: \ \psi(x, q) = \max_{s \in \Omega} \psi(x, s) = \theta(x)\}.$$

Prenons une suite arbitraire $\{x_k\} \to \bar{x}$ et considérons la suite $\{q_k\}$, $q_k \in Q(x_k)$, convergente vers $\bar{q}$. Il vient

$$\lim_{k \to \infty} \theta(x_k) = \lim_{k \to \infty} \psi(x_k, q_k) = \psi(\bar{x}, \bar{q}) \leqslant \theta(\bar{x}).$$

D'autre part, soit $\bar{\bar{q}} \in Q(\bar{x})$. On a

$$\theta(x_k) = \psi(x_k, q_k) \geqslant \psi(x_k, \bar{\bar{q}})$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots$ Pour $k \to \infty$ on en tire

$$\lim_{k \to \infty} \theta(x_k) = \lim_{k \to \infty} \psi(x_k, q_k) = \psi(\bar{x}, \bar{q}) \geqslant \psi(\bar{x}, \bar{\bar{q}}) = \theta(\bar{x}).$$

En comparant avec l'inégalité $\lim_{k \to \infty} \theta(x_k) \leqslant \theta(\bar{x})$, on déduit que $\lim_{k \to \infty} \theta(x_k) = \theta(\bar{x})$.

La continuité est prouvée.

Maintenant il est aisé de démontrer par récurrence la continuité de

$$\theta(x) = \max_{s \in \Omega} \psi(x, s),$$

où

$$\psi(x, s) = \min \{\psi_1(x, s), \quad \psi_2(x, s), \ \ldots, \psi_l(x, s)\},$$

et $\psi_i(x, s)$ sont des fonctions continues. Donc, $\tilde{\sigma}'(x)$ est continue elle aussi puisque tous les produits scalaires $\langle \varphi'(x), s\rangle$ et $\langle f_i'(x), s\rangle$ sont continus.

V. Montrons l'existence d'une sous-suite $\{x_{k_p}\}$ convergente pour $p \to \infty$ vers $\bar{x}$ auquel correspond $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = 0$, solution du problème

$$\max \sigma,$$
$$\langle f_i'(\bar{x}), s\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(\bar{x}, 0),$$
$$-\langle \varphi'(\bar{x}), s\rangle + \sigma \leqslant 0,$$
$$N(s) \leqslant 1.$$

Par là même, en vertu du théorème 10.6, on démontre l'optimalité du point $\bar{x}$. En vertu de la continuité de la fonction $\varphi(x)$, il s'ensuit que

$$\lim_{p \to \infty} \varphi(x_{k_p}) = \varphi(\bar{x}) = \varphi(x^*).$$

Puisque $\{\varphi(x_k)\}$ est une suite convergente, on démontre par là même que

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Le point III implique que $\sigma_{k_p} \to 0$ pour $p \to \infty$. Pour ne pas rendre trop lourdes les notations, admettons que $\sigma_k \to 0$ pour $k \to \infty$. Les raisonnements précédents rendent clair que cette admission ne limite pas la généralité de la démonstration.

A la suite $\{\sigma_k\}$ correspond la suite $\{x_k\}$ dont tous les éléments, en vertu du point I, appartiennent à l'ensemble borné

$$X_0 = \{x \in X : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}.$$

Extrayons de $\{x_k\}$ une sous-suite convergente. Toujours dans les mêmes notations, admettons que $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$. Comme le nombre de contraintes du problème initial est fini(égal à m), le nombre de collections différentes $I(x_k, \varepsilon_k)$ est fini lui aussi ; il existe donc une collection I' telle qu'elle reste invariable pour un nombre infini d'éléments de $\{x_k\}$. Cette fois encore, en conservant les mêmes notations, admettons qu'à toute $\{x_k\}$ correspond la collection I'. Ainsi, $x_k \to \bar{x}$ et $I(x_k, \varepsilon_k) = I'$, $\sigma_k \to 0$ pour $k \to \infty$. En vertu du point A de tous les trois algorithmes, $\sigma_k \geqslant \xi_k \tilde{\sigma}_k \geqslant \xi \tilde{\sigma}_k$; c'est pourquoi $\lim_{k \to \infty} \tilde{\sigma}_k = 0$. D'autre part, $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}'(x_k) \to \tilde{\sigma}'(\bar{x})$ d'après le point IV. De cette façon, $\tilde{\sigma}'(\bar{x}) = 0$. Ensuite, du fait que $I' = I(x_k, \varepsilon_k)$ il résulte que $0 \leqslant f_i(x_k) - b_i \leqslant \varepsilon_k$ pour tout $i \in I'$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Mais $\varepsilon_k \to 0$, $x_k \to \bar{x}$; par suite, $i \in I(\bar{x}, 0)$ pour tout $k \geqslant k_0$. Donc, $I' = I(x_k, \varepsilon_k) \subseteq I(\bar{x}, 0)$ pour tout $k \geqslant k_0$. Alors $\tilde{\sigma}(\bar{x}) \leqslant \tilde{\sigma}'(\bar{x})$, où $\tilde{\sigma}(\bar{x})$ est le maximum de σ du problème (10.55) lorsqu'on remplace I' par $I(\bar{x}, 0)$ et x par $\bar{x}$, alors que $\tilde{\sigma}'(\bar{x})$ est le maximum de σ du problème (10.55) pour $x = \bar{x}$. Puisque nous avons montré que $\tilde{\sigma}'(\bar{x}) = 0$, on a $\tilde{\sigma}(\bar{x}) \leqslant 0$. En vertu du théorème 10.6 cela signifie que le point $\bar{x}$ est optimal.

Ainsi nous avons montré que tout point limite de la suite $\{x_k\}$ est un

point optimal. On en tire

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Il est évident que dans le cas d'unicité du point optimal x^*, toute la suite $\{x_k\} \to x^*$. Le théorème 10.7 est démontré.

Remarque 1. Les trois algorithmes sont construits de façon que le théorème démontré implique la stabilité de la méthode des directions admissibles par rapport aux erreurs de calcul éventuels lors de la réalisation des points A, B, C des trois algorithmes.

Remarque 2. Jusqu'à ces derniers temps, l'estimation de la rapidité de convergence de la méthode des directions admissibles sous des hypothèses très générales sur le problème de programmation convexe n'a pas été obtenue.

Cas des contraintes linéaires. Si certaines des contraintes définissant l'ensemble X sont linéaires, il est avantageux de les ranger en deux groupes des contraintes linéaires et non linéaires

$$\begin{aligned} X = \{x:\ & f_i(x) \geqslant b_i, \quad i \in I_1, \\ & \langle a_i, x \rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2\}. \end{aligned} \tag{10.58}$$

Dans ce cas, le problème du choix de la direction de la descente s'écrit :

$$\begin{aligned} & \max \sigma, \\ \langle f_i'(x_k), s \rangle + \sigma \leqslant 0, \quad & i \in I_1(x_k, \varepsilon_k), \\ \langle a_i, s \rangle \leqslant 0, \quad & i \in I_2(x_k, \varepsilon_k), \\ -\langle \varphi'(x_k), s \rangle + \sigma \leqslant 0, & \\ N(s) \leqslant 1, & \end{aligned} \tag{10.59}$$

où

$$\begin{aligned} I_1(x_k, \varepsilon_k) &= \{i \in I_1:\ 0 \leqslant f_i(x_k) - b_i \leqslant \varepsilon_k\}, \\ I_2(x_k, \varepsilon_k) &= \{i \in I_2:\ 0 \leqslant \langle a_i, x_k \rangle - b_i \leqslant \varepsilon_k\}. \end{aligned}$$

Naturellement, les trois algorithmes de la méthode restent les mêmes, ainsi que la démonstration de la convergence de la méthode. De plus, la contrainte de régularité peut être affaiblie par rapport à celle introduite auparavant. Plus précisément, disons régulier pour un ensemble X défini par les relations (10.58) si pour tout $i \in I_1$ il existe $x \in X$ tel que $f_i(x) > b_i (i \in I_1)$. De la sorte, la régularité ne se rapporte qu'aux contraintes non linéaires.

Choix de la direction. Si

$$N(s) = N_2(s) = \max_{j = \overline{1, n}} |s_j|,$$

le choix de la direction (10.59) est un problème de programmation linéaire, et, donc, pour le résoudre, on peut appliquer des algorithmes finis. Mais si

$N(s) = N_1(s) = \|s\|^2$, alors (10.59) possède une contrainte non linéaire. Montrons que dans un certain sens ce problème est équivalent à un problème de programmation quadratique d'une forme spéciale.

Mettons le problème (10.39) sous la forme

$$\begin{gathered} \max \sigma, \\ Qs + \sigma \mathbf{I} \leqslant 0, \\ \langle s, s \rangle \leqslant 1. \end{gathered} \tag{10.60}$$

Ici Q est une matrice dont les lignes sont les vecteurs $[f_i'(x)]^T$ pour $i \in I(x, \varepsilon)$ et $[-\varphi'(x)]^T$. Pour simplifier les calculs, on a omis ici l'indice k de numérotation de l'itération. Par $\mathbf{I}$ on note le vecteur $\mathbf{I}^T = (1, 1, \ldots, 1)$.

Constatons que puisque $\sigma = 0$, $s = \mathbf{0}$ est un couple admissible, alors que l'ensemble admissible du problème (10.60) est borné et fermé, ce problème est toujours résoluble.

Considérons le problème

$$\begin{gathered} \min \langle s, s \rangle, \\ Qs + \mathbf{I} \leqslant \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{10.61}$$

Il est évident que si l'ensemble

$$\{s: \ Qs + \mathbf{I} \leqslant \mathbf{0}\}$$

est non vide, ce problème possède une solution. Désignons-là par s_1. Remarquons que $s_1 \neq \mathbf{0}$, puisque $s = \mathbf{0}$ n'est pas un point admissible du problème.

Théorème 10.8.

1) *Le couple* $\sigma^* = \dfrac{1}{\|s_1\|}$, $s^* = \dfrac{1}{\|s_1\|} s_1$ *est une solution du problème* (10.60).

2) *Si l'ensemble*

$$\{s: \ Qs + \mathbf{I} \leqslant \mathbf{0}\}$$

est vide, la valeur optimale de σ *du problème* (10.60) *est nulle.*

Démonstration. Comme

$$Qs^* + \sigma^* \mathbf{I} = \frac{1}{\|s_1\|}(Qs_1 + \mathbf{I}) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \langle s^*, s^* \rangle = 1,$$

le couple σ^*, s^* est admissible pour le problème (10.60). Supposons qu'il existe un couple $\bar{\sigma}$, $\bar{s}$ qui satisfait aux contraintes du problème (10.60) et tel que $\bar{\sigma} > \sigma^* > 0$. Alors, $\dfrac{1}{\bar{\sigma}} \bar{s}$ est un point admissible du problème (10.61):

$$Q \frac{1}{\bar{\sigma}} \bar{s} + \mathbf{I} = \frac{1}{\bar{\sigma}}(Q\bar{s} + \bar{\sigma}\mathbf{I}) \leqslant \mathbf{0},$$

et c'est pourquoi

$$\langle s_1, s_1 \rangle \leqslant \left\langle \frac{1}{\bar{\sigma}} \bar{s}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \bar{s} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \langle \bar{s}, \bar{s} \rangle < \left(\frac{1}{\sigma^*}\right)^2 \langle \bar{s}, \bar{s} \rangle = \langle s_1, s_1 \rangle \langle \bar{s}, \bar{s} \rangle,$$

d'où l'inégalité $\langle \bar{s}, \bar{s} \rangle > 1$ qui contredit le fait que $\bar{s}$ est un point admissible de (10.60). La deuxième proposition du théorème est une conséquence

évidente de sa première proposition. Pour résoudre le problème (10.61), il existe des algorithmes finis, dont au besoin le lecteur pourra trouver un exposé détaillé dans [7], [13].

10.4. Méthode de la recherche aléatoire

Comme nous l'avons vu, dans la minimisation avec contraintes qui se rapporte aux problèmes concernant directement la programmation mathématique, le choix de la direction de la descente est, dans le cas général de la donnée de l'ensemble X, un problème de grande taille qui, souvent, rend peu efficaces les méthodes de minimisation exposées. L'exception est composée par les cas où cet ensemble est d'une structure géométrique simple (lorsque c'est, par exemple, un parallélépipède multidimensionnel), mais, pour notre part, nous nous intéresserons précisément au cas général. Ce dernier présente une situation où la méthode de la recherche aléatoire peut s'avérer très avantageuse, la direction de la descente étant choisie d'une façon aléatoire. Dans ces conditions, naturellement, la convergence devient en général plus lente ; pourtant la simplicité du choix de la direction peut compenser cette perte du point de vue de l'effort nécessaire pour réaliser la minimisation.

Ainsi, on considère la minimisation d'une fonction $\varphi(x)$ sur un ensemble X. Supposons qu'on ait trouvé le point $x_k \in X$.

Choix de la direction de la descente. Sur la sphère unitaire de dimension n, de centre en origine des coordonnées, on choisit un point arbitraire r_k vérifiant sur cette sphère une répartition uniforme, puis la direction de la descente $-s_k$, sous les conditions $s_k = \theta_k r_k$, où

$$\theta_k = \begin{cases} -1 & \text{si } r_k \text{ est une direction admissible en } x_k, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Algorithme 1. Choisir comme approximation initiale x_0 un point quelconque $x_0 \in X$. D'après le point x_k calculé à la k-ième itération, construire le $(k+1)$-ième point x_{k+1} d'après la formule

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k.$$

Choisir comme β_k un nombre quelconque de

$$B_k = \{\beta \geqslant 0: \ x_k - \beta s_k \in X\},$$

vérifiant l'inégalité

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\,\varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{10.47}$$

où λ_k est quelconque et tel que $0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1$, et

$$\omega_k = \min_{\beta \in B_k} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k.$$

Choisir comme β_k le plus grand des nombres vérifiant les conditions

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k s_k) \geqslant \beta_k q_k \, |\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle|, \quad \beta \in B_k, \tag{10.64}$$

où q_k sont des nombres quelconques tels que $0 < q \leqslant q_k \leqslant \frac{1}{2}$.

Convergence. Démontrons la convergence sous les hypothèses suivantes :

1) X est un ensemble convexe et fermé ;

2) X est un ensemble régulier, c'est-à-dire il existe dans E_n une sphère de rayon $\varrho > 0$ qui appartient tout entière à l'ensemble X ;

3) quel que soit l'élément $x_0 \in X$, l'ensemble $X_0 = \{x \in X : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ est borné ;

4) $\varphi(x)$ est une fonction convexe et $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$.

Remarque. On voit aisément que la condition de régularité 2) est équivalente à la condition de régularité introduite au chapitre 3, paragraphe 3.1.

Pour justifier la convergence de la procédure de la recherche aléatoire il convient d'examiner plusieurs propriétés.

Propriété A. *Si un point $\bar{x} \in X$ n'est pas optimal, il existe $\bar{y} \in X$ tel qu'on ait l'inégalité*

$$\langle \varphi'(\bar{x}), \bar{x} - \bar{y} \rangle = \xi > 0.$$

Démonstration. Soit $\bar{y}$, projection du point $z = \bar{x} - \varphi'(\bar{x})$ sur l'ensemble X. Les propriétés de la projection donnent lieu à la relation

$$\langle \bar{x} - z, \bar{x} - \bar{y} \rangle \geqslant \| \bar{x} - \bar{y} \|^2,$$

c'est-à-dire

$$\langle \varphi'(\bar{x}), \bar{x} - \bar{y} \rangle \geqslant \| \bar{x} - \bar{y} \|^2.$$

On en déduit précisément la propriété A, puisque l'égalité $\bar{x} = \bar{y}$ est une condition nécessaire et suffisante de l'optimalité de $\bar{x}$ (théorème 2.16).

Dans tout ce qui suit nous désignons par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les points satisfaisant à la propriété A.

Propriété B. *Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les ensembles*

$$U = U(\bar{x}, \delta) = \{x \in X : \| x - \bar{x} \| \leqslant \delta\}$$

et

$$V = V(\bar{y}, \delta) = \{y \in X : \| y - \bar{y} \| \leqslant \delta\}$$

ne se coupent pas et des sphères R_1 et R_2 de dimension n, de rayons ϱ_1 et ϱ_2 telles que $R_1 \subset U$ et $R_2 \subset V$.

La démonstration se déduit de la propriété A (du fait que $\bar{x} \neq \bar{y}$) et des hypothèses 1) et 2)*).

Propriété C. *Il existe pour* $\xi = \langle \varphi'(\bar{x}), \bar{x}-\bar{y}\rangle > 0$ *un* $\delta > 0$ *tel que pour tous les* $x \in U(\bar{x}, \delta)$ *et* $y \in V(\bar{y}, \delta)$ *on ait l'inégalité*

$$\langle \varphi'(x), x-y\rangle \geqslant \frac{1}{2}\xi.$$

Démonstration. Introduisons la notation $\gamma = \max\limits_{x \in U} \|\varphi'(x)\|$. L'hypothèse 4) garantit que $\gamma < +\infty$. Adoptons

$$\delta \leqslant \frac{\xi}{2(L\|\bar{x}-\bar{y}\|+2\gamma)}.$$

Soient $u = x-\bar{x}$ et $v = y-\bar{y}(x \in U, y \in V)$; alors,

$$\langle \varphi'(x), x-y\rangle = \langle \varphi'(\bar{x}+u), \bar{x}-\bar{y}\rangle + \langle \varphi'(\bar{x}+u), u-v\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle \varphi'(\bar{x}+u), \bar{x}-\bar{y}\rangle - |\langle \varphi'(\bar{x}+u), u-v\rangle|.$$

Ensuite

$$|\langle \varphi'(\bar{x}+u), u-v\rangle| \leqslant \|\varphi'(\bar{x}+u)\|\,\|u-v\| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(\|u\|+\|v\|) \leqslant 2\gamma\delta.$$

Mais compte tenu de l'hypothèse 4) et de la propriété A, on obtient

$$\langle \varphi'(\bar{x}+u), \bar{x}-\bar{y}\rangle = \langle \varphi'(\bar{x}), \bar{x}-\bar{y}\rangle + \langle \varphi'(\bar{x}+u)-\varphi'(\bar{x}), \bar{x}-\bar{y}\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle \varphi'(\bar{x}), \bar{x}-\bar{y}\rangle - \|\varphi'(\bar{x}+u)-\varphi'(\bar{x})\|\,\|\bar{x}-\bar{y}\| \geqslant$$
$$\geqslant \xi - L\|u\|\,\|\bar{x}-\bar{y}\| \geqslant \xi - L\delta\|\bar{x}-\bar{y}\|.$$

Les trois dernières relations et le choix de la grandeur δ justifient la propriété C.

Définition. Nous dirons que l'*événement* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, s)$ a eu lieu s'il existe $\tilde{\beta} > 0$ tel que $y = x-\tilde{\beta}s \in V(\bar{y}, \delta)$, où $x \in U(\bar{x}, \delta)$, alors que $-s$ est une direction admissible choisie par recherche aléatoire.

Propriété D. *Si l'événement* $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(x_k, s_k)$ *survient, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \varepsilon.$$

---

*) On montre aisément que si le point w est le centre d'une sphère R de rayon ϱ appartenant à un ensemble régulier X, on peut adopter

$$\varrho_1 = \frac{\varrho\delta}{\|\bar{x}-w\|+\varrho};$$

de plus, le centre de la sphère R_1 est alors le point

$$w_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho}(w-\bar{x}).$$

Il en est de même pour R_2.

Démonstration. 1) Cas de l'algorithme 1. Soient $x_k \in U$ et y_k un point quelconque de l'intersection du rayon $x_k - \beta s_k$ avec l'ensemble V. Puisque

$$\omega_k = \min_{\beta \in B_k} \varphi(x_k - \beta s_k),$$

tout $\beta \in [0, 1]$ vérifie l'inégalité

$$\omega_k \leqslant \varphi(x_k - \beta(x_k - y_k)).$$

On en tire avec (10.47) et le lemme 9.3 l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k[\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta(x_k - y_k))] \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k \left[\beta \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle - \frac{1}{2} L\beta^2 \| x_k - y_k \|^2\right].$$

Mais

$$\| x_k - y_k \| \leqslant 2\delta + \| \bar{x} - \bar{y} \| \stackrel{\text{def}}{=} \theta;$$

c'est pourquoi la propriété C conduit pour tout $\beta \in [0, 1]$ à

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \left(\frac{1}{2}\beta\xi - \frac{1}{2} L\beta^2\theta^2\right).$$

Soit

$$\beta = \min\left\{1, \frac{1}{2}\frac{\xi}{L\theta^2}\right\}.$$

Si $\beta = 1$, alors $L\theta^2 \leqslant \frac{1}{2}\xi$ et

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{4}\lambda_k\xi.$$

Si $\beta = \frac{1}{2}\frac{\xi}{L\theta^2}$, alors

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{8}\lambda_k \frac{\xi^2}{L\theta^2}.$$

Et comme $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$, alors pour

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{4}\lambda\xi, \frac{1}{8}\lambda\frac{\xi^2}{L\theta^2}\right\}$$

la propriété D devient vraie.

2) Cas de l'algorithme 2. La propriété C implique

$$\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle = \frac{1}{\| x_k - y_k \|} \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\xi}{2\| x_k - y_k \|} \geqslant \frac{\xi}{2(\| \bar{x} - \bar{y} \| + 2\delta)}. \tag{10.65}$$

Maintenant vérifions que

$$\beta_k \geqslant \bar{\beta}_k = \min\left\{\zeta_k, \frac{1}{L}\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle\right\}, \tag{10.66}$$

où $\zeta_k = \sup_{\beta \in B_k} \beta$. Comme

$$\beta_k \leqslant \frac{1}{L} \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle,$$

le lemme 9.3 entraîne l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}_k - \beta_k s_k) \geqslant \beta_k \left[\langle \varphi'(x_k), s_k \rangle - \frac{1}{2} L \beta_k \right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \beta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle \geqslant q \beta_k \langle \varphi'(x_k), s_k \rangle.$$

De cette façon, β_k vérifie les relations (10.64). Et puisqu'on choisit comme β_k le plus grand des nombres satisfaisant aux conditions (10.64), l'inégalité (10.64) est vraie.

Choisissons la grandeur $\delta > 0$ si petite que $\|\bar{x} - \bar{y}\| - 2\delta > 0$. Etant donné que

$$\xi_k \geqslant \|x_k - y_k\| \geqslant \|\bar{x} - \bar{y}\| - 2\delta > 0,$$

il résulte de (10.66) et de (10.65) que

$$\beta_k \geqslant \min \left\{ \|\bar{x} - \bar{y}\| - 2\delta, \frac{\xi}{2L(\|\bar{x} - \bar{y}\| + 2\delta)} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1.$$

On en déduit avec (10.64) et (10.65)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant q\varepsilon_1 \frac{\xi}{2(\|\bar{x} - \bar{y}\| + 2\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon > 0.$$

Propriété E. *Si $\{x_k\}$ est une suite telle que $x_k \in U$, il vient*

$$P\left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k \right\} = 1.$$

Démonstration. Il s'ensuit des propriétés A et B que

$$\inf_{x \in U} P\{\mathfrak{M}_k \mid x\} = p > 0.$$

Pour $x_0, x_1, \ldots$ fixés, les événements correspondants $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$ sont réciproquement indépendants du fait que les variables aléatoires $s_0, s_1, \ldots$ sont réciproquement indépendantes. Par conséquent,

$$P\left\{ \bigcap_{k=0}^{m} \overline{\mathfrak{M}}_k \mid x_0, x_1, \ldots, x_m \right\} = \prod_{k=0}^{m} P\{\overline{\mathfrak{M}}_k \mid x_k\} =$$

$$= \prod_{k=0}^{m} (1 - P\{\mathfrak{M}_k \mid x_k\}) \leqslant (1-p)^m \to 0 \quad (m \to 0).$$

Ici $\overline{\mathfrak{M}}_k$ désigne l'événement supplémentaire à l'événement $\mathfrak{M}_k$, c'est-à-dire $\overline{\mathfrak{M}}_k$ traduit le fait que l'événement $\mathfrak{M}_k$ n'a pas lieu. Donc, d'après la loi de

« zéro ou un »

$$P\left\{\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\mathfrak{M}}_k \mid x_0, x_1, \ldots\right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$P\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k \mid x_0, x_1, \ldots\right\} = 1.$$

Cela signifie que $P\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k\right\} = 1.$

Théorème 10.9.

$$P\left\{\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*)\right\} = 1.$$

Démonstration. En vertu de la procédure adoptée, la suite des variables aléatoires $\{\varphi(x_k)\}$ est monotone :

$$\varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

et bornée :

$$\varphi(x_k) \geqslant \varphi(x^*) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

et, par conséquent, il existe

$$\bar{\varphi} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k).$$

Or, avec une probabilité égale à l'unité, il existe un indice k_0 tel que pour tout $k = k_0+1, k_0+2, \ldots$ on a l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) < \varepsilon. \tag{10.67}$$

Si, quel que soit $\delta_1 > 0$ aussi petit que l'on veut, il existe une sous-suite $\{x_{k_i}\}$ telle que

$$x_{k_i} \in U^* = \{x \in X: \ ||x - x^*|| \leqslant \delta_1\},$$

alors, avec une probabilité égale à l'unité,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(x_m) = \varphi(x^*).$$

Supposons qu'il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que dans le voisinage U^* ne tombe qu'un nombre fini de points de la suite $\{x_k\}$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que tous les $x_k \notin U^*$. Alors, avec une probabilité égale à l'unité, il existe un indice aléatoire $k \geqslant k_0$ tel que l'événement $\mathfrak{M}_k$ aura lieu, et donc on aura

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) > \varepsilon.$$

Or, ceci contredit la condition (10.67). Le théorème est démontré.

10.5. Méthode de la direction aléatoire projetée

La méthode de minimisation exposée dans le paragraphe précédent peut s'avérer inefficace. Il en est ainsi du fait que le nombre n, dimension de l'espace E_n, en augmentant rend décroissante la probabilité d'une direction admissible r_k. Pour illustrer la rapidité de cette décroissance, il y a cet exemple bien simple de $X = \{x: 0 \leqslant x_i \leqslant 1\ (i = \overline{1, n})\}$ et du point $x_k = 0$. Dans ce cas, la probabilité d'une direction aléatoire r_k est évidemment égale à 2^{-n}. C'est pourquoi, dans le cas de grands n, pour obtenir une direction admissible il faut en général à chaque itération réaliser un grand nombre d'épreuves ; or, à chaque épreuve on doit vérifier si pour β suffisamment petit le point $x_k - \beta r_k$ appartient à l'ensemble X, c'est-à-dire si $r_k = s_k$ et, donc, réaliser certains calculs.

Dans la méthode qui fait l'objet du présent paragraphe, une direction aléatoire devient admissible par suite de sa projection sur un ensemble admissible.

Désignons par z_k la projection du point $x_k - \Delta_k r_k$ sur l'ensemble X. Ici $\Delta_k = \operatorname{sign}\langle \varphi'(x_k), r_k \rangle$, alors que r_k se construit de même que dans la méthode précédente.

Algorithme 1.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k,$$
$$s_k = x_k - z_k.$$

Choisir comme β_k l'un quelconque des nombres satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x_k - \beta_k s_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\, \varphi(x_k) + \lambda_k \omega_k, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$

où

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0, 1]} \varphi(x_k - \beta s_k).$$

Algorithme 2.

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k s_k,$$
$$s_k = x_k - z_k.$$

Choisir comme β_k le plus grand des nombres satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta_k s_k) \geqslant \beta_k q_k \,|\langle \varphi(x_k), s_k \rangle|,$$
$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < q \leqslant q_k \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pour justifier la convergence de la méthode de projection, on peut procéder de même que dans le paragraphe précédent. La contrainte de régularité de l'ensemble X devient alors superflue.

En effet, examinons l'ensemble*)

$$V_0 = \{y: \ \|y - \bar{y}\| \leqslant \delta\}.$$

*) Ici $\bar{y}$, U et V sont les mêmes qu'au paragraphe 10.5.

Remarquons que

$$V = \{y \in X: \ ||y-\bar{y}|| \leqslant \delta\} \subseteq V_0.$$

Disons que l'événement $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(x, r)$ a eu lieu s'il existe $\alpha > 0$ tel que $x-\alpha r \in V_0$, où $x \in U$, alors que r est une direction choisie d'après la méthode de la recherche aléatoire. La détermination de l'événement $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, s)$ reste toujours la même, mais dans ces conditions

$$s = \frac{1}{||x-y||}(x-y).$$

Propriété F. *Si l'événement* $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{N}(x_k, r_k)$ *a eu lieu, l'événement* $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(x_k, s_k)$ *aura lieu également.*

Démonstration. Soient $v_k = x_k-\alpha r_k \in V_0$ et y_k sa projection sur l'ensemble X. Les propriétés de la projection entraînent

$$||y_k-x|| \leqslant ||v_k-x||$$

quel que soit $x \in X$ et, notamment,

$$||y_k-\bar{y}|| \leqslant ||v_k-\bar{y}||,$$

c'est-à-dire que $y_k \in V$.

Enfin, il est évident que pour tout $x \in U$ on a

$$P\{\mathfrak{M} \mid x\} \geqslant P\{\mathfrak{N} \mid x\} \geqslant \inf_{x \in U} P\{\mathfrak{N} \mid x\} = p > 0.$$

Rien de plus facile maintenant que de justifier la convergence de la minimisation si on reprend les raisonnements de la démonstration du théorème 10.9.

10.6. Modes de recherche d'un point admissible

Dans toutes les méthodes de relaxation passées en revue et appliquées à la résolution des problèmes de programmation mathématique, nous avons supposé connu le point initial $x_0 \in X$. Dans ce qui suit, nous donnons la description de trois méthodes pour rechercher le point x de l'ensemble

$$X = \{x: f_i(x) \geqslant b_i, \quad i \in I_1, \quad \langle a_i, x\rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2\}.$$

Pour calculer le point x vérifiant les contraintes linéaires $\langle a_i, x\rangle \geqslant b_i$, $i \in I_2$, appliquons l'une quelconque des méthodes de programmation linéaire (cf. les méthodes de la recherche d'un point anguleux initial). Remarquons que ces méthodes sont finies.

Ainsi, supposons connu $x_0 \in E_n$ tel que $\langle a_i, x_0\rangle \geqslant b_i$, $i \in I_2$. Notons

$$h_i(x) = \begin{cases} b_i-f_i(x), & i \in I_1, \\ b_i-\langle a_i, x\rangle, & i \in I_2. \end{cases}$$

Mode 1. Soit

$$\varrho_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_i(x_0) \leqslant 0, \quad i \in I_1, \\ 1 & \text{si} \quad h_i(x_0) > 0, \quad i \in I_1. \end{cases}$$

Pour obtenir un point admissible de X résolvons le problème

$$\begin{aligned} &\inf \xi, \\ &f_i(x) + \varrho_i \xi \geqslant b_i, \quad i \in I_1, \\ &\langle a_i, x \rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2. \end{aligned} \tag{10.64}$$

Pour ce problème, le couple admissible initial x_0, ξ_0 est

$$x_0 \quad \text{et} \quad \xi_0 = \max_{i \in I_1,\ \varrho_i = 1} h_i(x_0).$$

Désignons par x^*, ξ^* la solution du problème (10.64). Remarquons que puisque $\xi^* = \inf \xi$, cette notation prévoit également, en général, le cas $\xi^* = -\infty$.

S'il existe pour le problème (10.64) *un couple admissible* x, ξ *tel que* $\xi \leqslant 0$, *alors le point* x *appartient à l'ensemble* X. *Mais si dans la solution* x^*, ξ^* *de* (10.64) *on a* $\xi^* > 0$, *l'ensemble* X *est vide.* En effet, si $X \neq \varnothing$, il existe un x tel que $h_i(x) \leqslant 0$ pour tout $i \in I_1 \cup I_2$. Alors, en posant

$$\xi = \max_{i \in I_1} h_i(x) \leqslant 0,$$

on obtient que le couple x, ξ est admissible, et de plus, l'inégalité $\xi < \xi^*$ est vraie ; or, cette inégalité contredit l'hypothèse suivant laquelle la grandeur ξ^* est minimale.

Le problème (10.64) peut être résolu en appliquant un processus de relaxation quelconque. Dans notre cas, une convergence faible est suffisante. Appliquée au problème $\min\limits_{x \in X} \varphi(x)$, la convergence faible signifie que

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(x_m) = \inf_{x \in X} \varphi(x),$$

du fait que la convergence faible d'une relaxation de la résolution du problème (10.64) entraîne que

$$\lim_{m \to \infty} \xi_m = \xi^*.$$

Théorème 10.10. *Si* X *est un ensemble non vide régulier par rapport aux contraintes non linéaires, tout processus de relaxation à convergence faible conduit en un nombre fini d'itérations à un couple admissible* x, $\xi \leqslant 0$ *du problème* (10.64).

Démonstration. Si $\xi_0 \leqslant 0$, alors $x_0 \in X$. Supposons que $\xi_0 > 0$. Comme l'ensemble X est régulier, il existe un point $\bar{x} \in X$ tel que

$$h_i(\bar{x}) = b_i - f_i(\bar{x}) < 0$$

pour tout $i \in I_1$ et $\langle a_i, \bar{x} \rangle \geqslant b_i$ pour tout $i \in I_2$. Il en résulte que le couple

$$\bar{x}, \bar{\xi} = \max_{i \in I_1,\ \varrho_i = 1} h_i(\bar{x}) < 0$$

vérifie les contraintes du problème (10.64), et donc

$$\lim_{m \to \infty} \xi_m = \xi^* \leqslant \bar{\xi} < 0.$$

Mais la valeur initiale ξ_0 est positive ($\xi_0 > 0$) et c'est pourquoi les propriétés de la suite convergente $\{\xi_m\}$ entraînent l'existence d'un indice m_0 à partir duquel tout $\xi_m \leqslant 0$ ($m = m_0, m_0+1, \ldots$). Ainsi, quel que soit le processus de relaxation à convergence faible, il aboutit en un nombre fini d'itérations au couple x_{m_0}, $\xi_{m_0} \leqslant 0$.

M o d e 2. Soit x_0 un point fixé de E_n. Adoptons

$$\varrho_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h_i(x_0) \leqslant 0, \quad i \in I_1 \cup I_2, \\ 1 & \text{si} \quad h_i(x_0) > 0, \quad i \in I_1 \cup I_2. \end{cases}$$

Pour chercher le point admissible de l'ensemble X résolvons le problème :

$$\begin{gathered} \min \xi, \\ f_i(x) + \varrho_i \xi \geqslant b_i, \quad i \in I_1, \\ \langle a_i, x \rangle + \varrho_i \xi \geqslant b_i, \quad i \in I_2. \end{gathered} \tag{10.65}$$

Le couple admissible initial x_0, ξ_0 de ce problème est

$$x_0 \quad \text{et} \quad \xi_0 = \max_{i,\ \varrho_i = 1} h_i(x_0).$$

Il est clair que s'il existe un couple admissible x, ξ tel que $\xi = 0$, alors x appartient à l'ensemble X. Mais si dans la solution x^*, ξ^* du problème (10.65) on a $\xi^* > 0$, l'ensemble X sera alors vide.

A la différence de la méthode précédente, la recherche du point admissible de X se fait ici en une étape (on n'est pas obligé de résoudre séparément le problème de la recherche du point vérifiant les contraintes linéaires), la finitude de la relaxation ne pouvant être garantie que dans le cas $\xi^* < 0$, par exemple, dans celui d'un ensemble X régulier par rapport aux contraintes linéaires et non linéaires.

M o d e 3. Considérons le problème général de programmation convexe

$$\min_{x \in X} \varphi(x),$$

où

$$X = \{x \in \Gamma:\ f_i(x) \geqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}\},$$

alors que

$$\Gamma = \{x:\ x \geqslant 0\}.$$

Le troisième mode est une généralisation de la M-méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire au cas non linéaire (convexe).

Pour un point fixé $x_0 \geqslant 0$ déterminons la quantité

$$\varrho_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f_i(x_0) \geqslant b_i, \\ 1 & \text{si} \quad f_i(x_0) < b_i, \end{cases}$$

et considérons le problème

$$\begin{gathered}\min[\varphi(x)+M\xi],\\ f_i(x)+\varrho_i\xi \geqslant b_i, \quad i=\overline{1, m}.\\ x \geqslant 0, \quad \xi \geqslant 0.\end{gathered} \tag{10.66}$$

Ici M est un certain nombre, dont le choix sera décrit dans ce qui suit.

$$x_0, \xi_0 = \max_{i,\ \varrho_i = 1} [b_i - f_i(x_0)]$$

est un couple admissible du problème (10.66). Nous montrerons que dans certaines conditions, la solution x^*, ξ^* de ce problème est telle que x^* est un point optimal du problème général.

Supposons observées toutes les conditions du théorème 3.4 ; plus précisément, l'ensemble X du problème général de programmation convexe jouit de la propriété de régularité (3.3), alors que les fonctions $\varphi(x)$ et $f_i(x)$ $(i=\overline{1, m})$ sont continûment dérivables sur l'ensemble $\Gamma = \{x: x \geqslant 0\}$. Dans ces hypothèses on a le théorème suivant.

Théorème 10.11. *Si le problème général de programmation convexe est résoluble, il existe un nombre M_0 tel que pour tout $M \geqslant M_0$, quelle que soit la solution x^*, ξ^* du problème* (10.66), *x^* est un point optimal du problème général.*

Démonstration. Par condition, il existe un point $x^* \in X$ tel que

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x).$$

On déduit du théorème 3.4 qu'il existe y_i^* $(i=\overline{1, m})$ et v_j^* $(j=\overline{1, n})$ tels qu'ils vérifient les relations

$$\begin{gathered}\varphi'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{n} v_j^* e_j,\\ v_j^* x_j^* = 0, \quad v_j^* \geqslant 0, \quad x_j^* \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}),\\ y_i^*[b_i - f_i(x^*)] = 0, \quad y_i^* \geqslant 0, \quad b_i - f_i(x^*) \leqslant 0 \quad (i=\overline{1, m}).\end{gathered} \tag{10.67}$$

Le même théorème 3.4 appliqué au problème de programmation convexe (10.66) établit les conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple x, ξ soit optimal. Plus précisément, il existe des x, ξ, y_i $(i=\overline{1, m})$, v_j $(j=\overline{1, n+1})$ tels qu'ils justifient les relations

$$\begin{gathered}\varphi'(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i'(x) + \sum_{j=1}^{n} v_j e_j,\\ M = \sum_{i=1}^{m} y_i \varrho_i + v_{n+1},\\ v_j x_j = 0, \quad v_j \geqslant 0, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}),\\ v_{n+1}\xi = 0, \quad v_{n+1} \geqslant 0, \quad \xi \geqslant 0,\\ y_i[b_i - f_i(x) - \varrho_i\xi] = 0, \quad y_i \geqslant 0,\\ b_i - f_i(x) - \varrho_i\xi \leqslant 0 \quad (i=\overline{1, m}).\end{gathered} \tag{10.68}$$

Construisons maintenant la solution de ce système en nous appuyant sur (10.67). En adoptant

$$M_0 = \max \left\{1, (m+1) \max_{i=\overline{1,m}} y_i^*\right\},$$

on obtient

$$M \geqslant M_0 \geqslant (m+1) \max_{i=\overline{1,m}} y_i^* > \sum_{i=1}^{m} y_i^* \varrho_i.$$

Alors, pour

$$x = x^*, \quad \xi = \xi^* = 0, \quad y_i = y_i^* \quad (i = \overline{1, m}), \quad v_j = v_j^*$$

$$(j = \overline{1, n}), \quad v_{n+1} = v_{n+1}^* = M - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \varrho_i > 0$$

toutes les relations du système (10.68) sont vérifiées et, par conséquent, le couple $\bar{x}^*$, $\xi^* = 0$ est une solution du problème (10.66).

Montrons maintenant que pour $M \geqslant M_0$ dans toute solution $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ du problème (10.66) on a $\bar{\xi} = 0$, et, donc, puisque (10.68) se déduit de (10.67), $\bar{x}$ est optimal pour le problème initial. Supposons qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que $\bar{\xi} > 0$; alors, puisque le couple x^*, $\xi^* = 0$ est optimal pour le problème (10.66), il vient

$$\varphi(x^*) = \varphi(\bar{x}) + M\bar{\xi},$$

et donc

$$\bar{\xi} = \frac{1}{M} [\varphi(x^*) - \varphi(\bar{x})]. \tag{10.69}$$

Considérons la fonction

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} v_j^* x_j.$$

(10.67) entraîne que $F'(x^*) = \varphi'(x^*)$ et

$$F(x^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i.$$

Puisque $v_j^* \geqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$ et $\bar{x} \geqslant 0$, il vient

$$F(\bar{x}) \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_i^* f_i(\bar{x});$$

il en résulte

$$F(x^*) - F(\bar{x}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} y_i^* [b_i - f_i(\bar{x})]. \tag{10.70}$$

Puisqu'on examine le problème général de programmation convexe, toutes les fonctions $f_i(x)$ sont concaves et comme tout $y_i^* \geqslant 0$, la fonction $F(x)$ est aussi concave ; il s'ensuit donc que

$$F(x^*)-F(\bar{x}) \geqslant \langle F'(\bar{x}^*), \quad x^*-\bar{x}\rangle = \langle \varphi'(x^*), x^*-\bar{x}\rangle.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant convexe, on obtient

$$\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}) \leqslant \langle \varphi'(x^*), x^*-\bar{x}\rangle.$$

Ainsi, on a l'inégalité

$$F(x^*)-F(\bar{x}) \geqslant \varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}). \tag{10.71}$$

Si tous les $y_i^*[b_i-f_i(\bar{x})] \leqslant 0$, alors, en vertu de (10.70) et de (10.71), on aboutit à l'inégalité $\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}) \leqslant 0$ qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $\bar{\xi} > 0$ (cf. (10.69)). Soit

$$y_k^*[b_k-f_k(\bar{x})] = \max_{1=\overline{1,m}} y_i^*[b_i-f_i(\bar{x})] > 0.$$

Alors (cf. (10.70)), on a

$$F(x^*)-F(\bar{x}) \leqslant m y_k^*[b_k-f_k(\bar{x})] \leqslant m[b_k-f_k(\bar{x})] \max_{i=\overline{1,m}} y_i^* <$$

$$< M_0[b_k-f_k(\bar{x})] \leqslant M[b_k-f_k(\bar{x})].$$

On en tire, compte tenu de (10.71) et (10.69),

$$b_k-f_k(\bar{x}) > \frac{1}{M}[F(x^*)-F(\bar{x})] \geqslant \frac{1}{M}[\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x})] = \bar{\xi},$$

c'est-à-dire $f_k(\bar{x})+\bar{\xi} < b_k$. Mais comme le couple $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ vérifie les contraintes du problème (10.66), pour $\varrho_k = 1$ cette dernière inégalité contredit l'admissibilité du couple $\bar{x}$, $\bar{\xi}$. Elle est d'autant plus contradictoire pour $\varrho_k = 0$. Ainsi, l'hypothèse $\bar{\xi} > 0$ conduit à des contradictions. Le théorème est démontré.

Corollaire. *S'il existe un M si grand que dans la solution x^*, ξ^* du M-problème* (10.66) *on ait $\xi^* > 0$, alors le problème général de programmation convexe est irréalisable.*

En effet, si le problème général est résoluble, alors pour $M \geqslant M_0$ dans toute solution du M-problème on a $\xi^* = 0$. Cette contradiction prouve précisément le corollaire.

Discussion. 1. Naturellement, la grandeur M_0 nous est pratiquement inconnue. On choisit donc comme M un certain nombre suffisamment grand. De plus, il faut tenir compte du fait que le choix d'un M trop grand peut rendre moins précis les calculs.

2. Si dans l'ensemble X on relève des contraintes linéaires, c'est-à-dire si

$$X = \{x \geqslant 0\colon\ f_i(x) \geqslant b_i,\ i \in I_1,\ \langle a_i, x\rangle \geqslant b_i,\ i \in I_2\},$$

le théorème 10.10 reste également vrai sous la condition que l'ensemble X est régulier seulement par rapport aux contraintes non linéaires.

3. Indiquons enfin encore une application de la M-méthode. Supposons qu'un processus de minimisation fournisse un point x_0 voisin de x^*, mais n'appartenant pas à l'ensemble X. Dans ce cas, l'application du procédé 3 peut être riche de promesses pour rendre plus précise la solution approchée x_0.

10.7. Convergence des méthodes de relaxation dans les problèmes à fonction économique non convexe

Considérons une fonction $\varphi(x)$ définie sur un ensemble X convexe fermé. Introduisons les notations

$$X^* = \{x^* \in X:\ \varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x)\};$$

$p^*(x)$, la projection du point x sur l'ensemble X^* :

$$\varrho(x, X^*) \stackrel{\text{def}}{=} \|p^*(x) - x\| = \min_{x^* \in X^*} \|x^* - x\|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ déterminons l'ensemble

$$U_\varepsilon = \{x \in X:\ \varrho(x, X^*) \leqslant \varepsilon\}.$$

Soient $v = x - \nu\varphi'(x)$, $\nu > 0$, $p(v)$ la projection du point v sur l'ensemble X :

$$\|p(v) - v\| = \min_{x \in X} \|x - v\|.$$

Supposons observées dans tout ce qui suit les conditions suivantes :

1) *X est un ensemble convexe et fermé ;*

2) $\varphi(x) \in C^{1,1}(X)$;

3) $X^* \neq \varnothing$;

4) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x - p(v)\| \geqslant \delta$ pour tout $x \in X \setminus U_\varepsilon$.*

Remarquons que quel que soit le point du minimum local de la fonction $\varphi(x)$ sur l'ensemble X, on a $\|x - p(v)\| = 0$ (remarque au théorème 2.16) ; c'est pourquoi la condition 4) signifie que partout en dehors de l'ensemble X^* les conditions nécessaires du minimum local ne sont pas remplies.

Procédons à l'analyse de la convergence des méthodes du gradient projeté et de linéarisation en les appliquant au problème

$$\min_{x \in X} \varphi(x).$$

Méthode du gradient projeté (cf. algorithme 1, paragraphe 10.2).

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k),\ v_k = x_k - \nu_k\varphi'(x_k) \quad (0 < \nu_k < \nu < \infty),$$

$$\beta_k : \varphi(x_k - \beta_k(x_k - y_k)) \leqslant (1 - \lambda_k)\,\varphi(x_k) + \lambda_k\omega_k,$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1,$$

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0,1]} \varphi\big(x_k - \beta(x_k - p(v_k))\big).$$

Théorème 10.12. *Si les conditions* 1)-4) *sont observées, la suite* $\{x_k\}$ *construite suivant la méthode du gradient projeté est telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(x_k, x^*) = 0.$$

Si, de plus,

$$\|\varphi'(x^*)\| \leqslant \gamma < \infty \text{ pour tout } x^* \in X^*,$$

il vient

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Démonstration. D'une façon analogue à l'inégalité (10.33) (cf. démonstration du théorème 10.3), on déduit du lemme 9.3

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant C\|x_k - p(v_k)\|,$$

où

$$C = \frac{\lambda}{2\nu} \min\left\{1, \frac{1}{\nu L}\right\}.$$

D'où, en vertu de la condition 4), il s'ensuit que quel que soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $x_k \in X \setminus U_\varepsilon$

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \eta \stackrel{\text{def}}{=} C\delta^2.$$

Puisque le théorème 9.12 est également vrai pour le problème de minimisation sur un ensemble X convexe et fermé, la dernière inégalité et le théorème 9.12 entraînent

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(x_k, X^*) = 0.$$

Ensuite, en utilisant la formule des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi(x_k) - \varphi(p^*(x_k)) &\leqslant \|\varphi'(\tilde{x})\| \, \|x_k - p^*(x_k)\| \leqslant \\
&\leqslant \left(\|\varphi'(\tilde{x}) - \varphi'(p^*(x_k))\| + \|\varphi'(p^*(x_k))\|\right) \|x_k - p^*(x_k)\| \leqslant \\
&\leqslant (L\|\tilde{x} - p^*(x_k)\| + \gamma)\, \|x_k - p^*(x_k)\| \leqslant \\
&\leqslant L\varrho^2(x_k, X^*) + \gamma\varrho(x_k, X^*) \to 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

Méthode de linéarisation (méthode de type Frank et Wolfe) (cf. algorithme 4, paragraphe 10.1)

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k(x_k - y_k),$$

$$y_k\colon \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k\rangle \geqslant \min\left\{-\sigma_k \inf_{x\in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k\rangle, \alpha_k\right\}$$

$$(0 < \sigma \leqslant \sigma_k \leqslant 1, \quad 0 < \alpha \leqslant \alpha_k < \infty),$$

$$\beta_k\colon \varphi(x_k - \beta_k(x_k - y_k)) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(x_k) + \lambda_k\omega_k$$

$$(0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1),$$

$$\omega_k = \min_{\beta\in[0,1]} \varphi(x_k - \beta(x_k - y_k)).$$

Théorème 10.13. *Si les conditions* 1)-4) *sont remplies et s'il existe un nombre* $\varkappa > 0$ *tel que* $\|x_k - y_k\| \leqslant \varkappa < \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *la suite* $\{x_k\}$ *construite suivant la méthode de linéarisation est telle que*

$$\lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, X^*) = 0.$$

Si de plus

$$\|\varphi'(x^*)\| \leqslant \gamma < \infty \quad \textit{pour tout } x^* \in X^*,$$

il vient

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*).$$

Démonstration. Si $-\sigma_k \inf\limits_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \leqslant \alpha_k$, alors $\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \sigma_k \langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k) \rangle$, où $p(v_k)$ est la projection du point $v_k = x_k - \nu_k \varphi'(x_k)$ $(0 < \nu_k \leqslant \nu < \infty)$ sur l'ensemble X. Mais (cf. (10.25))

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - p(v_k) \rangle \geqslant \frac{1}{\nu_k} \|x_k - p(v_k)\|^2,$$

et donc

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \frac{\sigma}{\nu} \|x_k - p(v_k)\|^2.$$

Mais si

$$-\sigma_k \inf_{x \in X} \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle > \alpha_k,$$

il vient

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \alpha_k > \alpha > 0.$$

C'est pourquoi pour tout $x_k \in X \backslash u_\varepsilon$, en vertu de la condition 4),

$$\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant \min \left\{ \frac{\sigma}{\nu} \delta^2, \alpha \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1.$$

En utilisant le lemme 9.3, on obtient l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k [\varphi(x_k) - \omega_k] \geqslant \lambda_k [\varphi(x_k) - \varphi(x_k - \beta(x_k - y_k))] \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k \left[\beta \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle - \frac{1}{2} L \beta^2 \|x_k - y_k\|^2 \right],$$

vraie pour tout $\beta \in [0, 1]$. Adoptons

$$\beta = \min \left\{ 1, \tau_k \frac{\langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle}{\|x_k - y_k\|^2} \right\} \quad \left(0 < \varepsilon_1 \leqslant \tau_k \leqslant \frac{2 - \varepsilon_2}{L} \right).$$

Si $\beta = 1$, en vertu de l'inégalité $\|x_k - y_k\|^2 \leqslant \tau_k \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle$, on obtient

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} L \tau_k \right) \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_2 \langle \varphi'(x_k), x_k - y_k \rangle.$$

Si

$\beta = \tau_k \frac{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - y_k\rangle}{\|x_k - y_k\|^2}$, il vient

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \lambda_k \tau_k \left(1 - \frac{1}{2} L\tau_k\right) \frac{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - y_k\rangle^2}{\|x_k - y_k\|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\langle \varphi'(x_k),\, x_k - y_k\rangle^2}{\|x_k - y_k\|^2} \geqslant \frac{1}{2} \frac{\lambda \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varkappa^2} \eta_1^2.$$

Ainsi

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_2 \eta_1 \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\varkappa^2} \eta_1\right\},$$

et pour tout $x_k \in X \setminus U_\varepsilon$ on a l'inégalité

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \eta,$$

où $\eta = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_2 \eta_1 \min\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\varkappa^2} \eta_1\right\}$, et donc, d'après le théorème 9.12,

$$\lim_{k \to \infty} \varrho(x_k, X^*) = 0.$$

La relation

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x^*)$$

est démontrée de même que dans le théorème précédent.

Remarque sur les conditions d'existence des estimations de la rapidité de convergence. Dans le cas où la fonction convexe $\varphi(x)$ vérifie les conditions des théorèmes 10.12 et 10.13, on a des estimations de la rapidité de convergence des méthodes du gradient projeté et de linéarisation analogues à celles des paragraphes 10.1 et 10.2. Il est vrai que les constantes de ces estimations diffèrent, mais l'ordre de la rapidité de convergence est toujours le même.

BIBLIOGRAPHIE

1. BAKHVALOV N. Méthodes numériques. Editions Mir, Moscou, 1976.
2. CÉA J. Optimisation. Théorie et algorithmes. Dunod, Paris, 1971.
3. PCHÉNITCHNY B. et DANILINE Y. Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémum. Editions Mir, Moscou, 1977.
4. POLAK E. Computational Methods in Optimisation. Acad. Press, New York-London, 1975.
5. SIMONNARD M. Programmation linéaire. Dunod, Paris, 1962.
6. WILDE D. J. Optimum Seeking Methods. Prentice Hall, 1964.
7. ZANGWILL W. I. Nonlinear Programming. Prentice Hall, 1969.
8. ZOUTENDIJK G. Method of feasible Directions. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1960.

INDEX

Base duale 85
  d'un point anguleux 67

Combinaison convexe 23
Cône 26
Convexité forte 41

Dérivée suivant une direction 31
Direction admissible 37

Ensemble admissible 36
  convexe 19, 37
  fermé 19
Erreurs admissibles 132
Espace euclidien 18
Essais successifs 117

Facteurs d'échelle 154
Fonction concave 29
  convexe 29
  — quadratique 30
  économique 8
  de pénalité 98
Forme canonique du problème de programmation linéaire 69
  mixte des problèmes duals 67
Frontière d'un ensemble 19

Hyperplan 21
  d'appui 21
  de séparation 23

Lagrangien 46

Matrice d'une base 67
  des conditions 57
Méthode de la base artificielle 77
  de la descente aléatoire 159, 166, 167
  de la direction aléatoire projetée 205
  des directions admissibles 184
  — conjuguées 84
  duale du simplexe 84
  de Fibonacci 118, 120, 122
  du gradient 143, 166, 167
  — projeté 175
  des gradients conjugués 145
  de linéarisation (du type de Frank et Wolfe) 168
  de Newton 125
  des perturbations 80
  de la plus grande pente 144
  primale-duale 90
  de la recherche aléatoire 199
  de régularisation 109, 110, 112
  de la section dorée 118, 124
  séquentielle 152
  — aléatoire (de Gauss-Seidel) 156
  — cyclique (de Gauss-Seidel) 154, 167
  du simplexe 72, 83
Méthodes de descente 137, 167
  de premier ordre 152
M-méthode 79, 204
Modèle mathématique 7, 9

Norme euclidienne 18

Pénalité 96
Point anguleux 23
  — non dégénéré 70
  frontière 19
  limite 19

Point optimal 47
selle 47
Problème correctement posé 106
— — au sens faible 106
non dégénéré 72
de distribution 15
dual 56, 67
général de programmation convexe 45
— — linéaire 56
incorrectement posé 106
du restaurateur 11
de la solution normale 109
de transport 12
Programmation convexe 10
linéaire 10
non linéaire 10
en nombres entiers 10
Programmation quadratique 10
stochastique 10
Programme (solution réalisable) 109
optimal 109
Projection 19

Régularité d'un ensemble 46
Relaxation 132

Solution normale 109
réalisable (programme) 109
Stabilité de la méthode 132

Théorème de Farkas 25
de Kuhn-Tucker 48
de séparation 21

Vecteurs des conditions 57
des contraintes 57
Voisinage (ε-voisinage) 19